MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
20 mars 2026

Lösningsförslag.

1. (a) Eftersom $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$, så är

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}.$$

Vi kan se att denna mängd utgör ett delrum till $\mathbb{R}^2$ via delrumstestet:

- $(0,0) \in W$ eftersom $0 + 0 = 0$.
- Om $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$, så tillhör summan $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ också W eftersom

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0.$$

- Om $(x,y) \in W$ och $c \in \mathbb{R}$, så tillhör $c(x,y) = (cx, cy)$ också W eftersom

$$cx + cy = c(x + y) = c \cdot 0 = 0.$$

(b) Operatorn T kallas *diagonaliserbar* om det finns en bas B för V sådan att matrisrepresentationen $[T]\underset{B}{\overset{B}{\uparrow}}$ är diagonal. Detta är ekvivalent med att det finns en bas för V som består av egenvektorer för T.

(c) Avbildningen T är en isometri/ortogonal om och endast om den bevarar normer, det vill säga

$$\|T(x,y)\| = \|(x,y)\| \text{ för alla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Eftersom $T(x,y) = c(x,y)$, så är $\|T(x,y)\| = \|c(x,y)\| = |c|\|(x,y)\|$. Därför är T en isometri/ortogonal om och endast om $|c| = 1$, det vill säga $c = \pm 1$.

2. (a) Bildrummet $R(T)$ och nollrummet $N(T)$ är mängderna

$$R(T) = \{T(v) : v \in V\} \quad \text{respektive} \quad N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

(b) Bildrummet ges av

$$\begin{aligned} R(T) &= \{T(p(x)) : p(x) \in \mathrm{P}_3(\mathbb{R})\} \\ &= \{T(a + bx + cx^2 + dx^3) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a\,T(1) + b\,T(x) + c\,T(x^2) + d\,T(x^3) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{span}(\{T(1),\ T(x),\ T(x^2),\ T(x^3)\}). \end{aligned}$$

Vi beräknar därför T:s verkan på basvektorerna $1, x, x^2, x^3$ i $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} T(1) &= (x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0, \\ T(x) &= (x-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2, \\ T(x^2) &= (x-1) \cdot 2 - 2 \cdot 2x = -2x - 2, \\ T(x^3) &= (x-1) \cdot 6x - 2 \cdot 3x^2 = -6x. \end{aligned}$$

Alltså är

$$R(T) = \text{span}(\{0, -2, -2x-2, -6x\}) = \text{span}(\{1, x\}).$$

Därmed är

$$\text{rang}(T) = \dim(R(T)) = 2, \quad \text{och} \quad \{1, x\} \text{ är en bas för } R(T).$$

För nollrummet så ser vi enligt dimensionssatsen att $\dim(N(T)) = \dim(\text{P}_3(\mathbb{R})) - \dim(R(T)) = 4 - 2 = 2$, och vi ser från ovan uträkning att $T(1) = 0$. Vi ser också därifrån att $T(x^3) - 3T(x^2) + 3T(x) = 0$, så $T(x^3 - 3x^2 + 3x) = 0$. Därmed har vi hittat två linjärt oberoende vektorer i $N(T)$, nämligen 1 och $x^3 - 3x^2 + 3x$, och eftersom $\dim(N(T)) = 2$, så är $\{1, x^3 - 3x^2 + 3x\}$ en bas för $N(T)$.

Svar: Rangen av T är 2, en bas för bildrummet $R(T)$ är $\{1, x\}$, och en bas för nollrummet $N(T)$ är $\{1, x^3 - 3x^2 + 3x\}$.

3. Vi använder Gram–Schmidt metoden på basen $1, x, x^2$ för $\text{P}_2(\mathbb{R})$:

$$v_1 = 1,$$

$$v_2 = x - \frac{\langle x, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 \cdot x^2\, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \cdot x^2\, dx} \cdot 1 = x - \frac{0}{\dots} \cdot 1 = x,$$

$$\begin{aligned} v_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle x^2, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 \\ &= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \cdot x^2\, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \cdot x^2\, dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x \cdot x^2\, dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \cdot x^2\, dx} \cdot x \\ &= x^2 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} \cdot 1 - \frac{0}{\dots} \cdot x = x^2 - \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Alltså är $\{1, x, x^2 - \frac{3}{5}\}$ en ortogonal bas för $\text{P}_2(\mathbb{R})$ relativt den givna inre produkten.

För delrummet $U = \text{span}(\{x\})^\perp$: vi vet enligt en kurssats att

$$\dim U = \dim(\text{P}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{span}(\{x\})) = 3 - 1 = 2,$$

och vi vet enligt ovan att 1 och $x^2 - \frac{3}{5}$ är ortogonala mot x. Alltså är $\{1, x^2 - \frac{3}{5}\}$ en bas för U.

Svar: En ortogonal bas för $\text{P}_2(\mathbb{R})$ relativt den givna inre produkten är $\{1, x, x^2 - \frac{3}{5}\}$, och en bas för delrummet U är $\{1, x^2 - \frac{3}{5}\}$.

4. (a) En matris $A \in \text{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ är *normal* om den kommuterar med sitt adjungat, dvs.

$$AA^* = A^*A,$$

och den är *självadjungerad* om den är lika med sitt adjungat, dvs.

$$A = A^*.$$

(b) i. Enligt den reella spektralsatsen så har $\mathbb{R}^2$ en ON-bas bestående av egenvektorer för A om och endast om A är självadjungerad/symmetrisk, dvs. $A = A^T$. Eftersom $A \neq A^T$, så har $\mathbb{R}^2$ ingen ON-bas bestående av egenvektorer för A.

ii. Enligt den komplexa spektralsatsen så har $\mathbb{C}^2$ en ON-bas bestående av egenvektorer för B om och endast om B är normal, dvs. $BB^* = B^*B$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} BB^* &= \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \\ B^*B &= \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom $BB^* = B^*B$, så är B normal, och därmed har $\mathbb{C}^2$ en ON-bas bestående av egenvektorer för B.

(c) Enligt de reella och komplexa spektralsatserna så söker vi en reell matris C som är normal men inte självadjungerad/symmetrisk. Ett exempel på en sådan matris är

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan kontrollera att C är normal genom att beräkna

$$\begin{aligned} CC^* &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ C^*C &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Man kan också se från den första beräkningen att $C^* = 2C^{-1}$, så C och C^* kommuterar, dvs. C är normal.)

5. (a) Vi kan beräkna singulärvärdena för A genom att först beräkna egenvärdena för A^*A:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Vi hade även kunnat beräkna AA^*, och sedan beräkna egenvärdena för denna matris.) Vi beräknar det karakteristiska polynomet för A^*A via radexpansion i andra raden:

$$\begin{aligned} \det(A^*A - tI) &= \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 2 \\ 0 & 8-t & 0 \\ 2 & 0 & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (8-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & 2-t \end{pmatrix} \\ &= (8-t) \cdot ((2-t)^2 - 4) \\ &= (8-t) \cdot (t^2 - 4t) \\ &= -t(t-4)(t-8). \end{aligned}$$

Egenvärdena för A^*A är alltså 0, 4, och 8. Därför är singulärvärdena $\sigma_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ och $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$.

Svar: Singulärvärdena för A är $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$ och $\sigma_2 = 2$.

(b) Dessa vektorer är precis vad singulärvärdessatsen garanterar att det finns. Vi börjar med att hitta ON-basen v_1, v_2, v_3 för $\mathbb{R}^3$ genom att beräkna egenvektorerna för A^*A. (Vi vet att en sådan bas finns tack vare reella spektralsatsen, eftersom A^*A är självadjungerad/symmetrisk.)

- För egenvärdet $8 = \sigma_1^2$: vektorn $(0, 1, 0)^T$ är uppenbarligen en egenvektor med detta egenvärde, men vi kan även lösa det homogena ekvationssystemet

$$(A^*A - 8I)\vec{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x = z = 0.$$

  Egenrummet spänns alltså upp av t.ex. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- För egenvärdet $4 = \sigma_2^2$: vi löser det homogena ekvationssystemet

$$(A^*A - 4I)\vec{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x = z \text{ och } y = 0.$$

  Egenrummet spänns alltså upp av t.ex. $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, som är normerad.

- För egenvärdet 0: vi löser det homogena ekvationssystemet

$$(A^*A - 0I)\vec{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x = -z \text{ och } y = 0.$$

  Egenrummet spänns alltså upp av t.ex. $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, som är normerad.

Dessa tre vektorer utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.

Nu beräknar vi u_1 och u_2 sådana att $Av_1 = \sigma_1 u_1$ och $Av_2 = \sigma_2 u_2$:

$$u_1 = \tfrac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \tfrac{1}{\sigma_2} Av_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Precis som beviset av singulärvärdessatsen garanterar så är u_1 och u_2 ortonormala, så de utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^2$.

Svar: ON-baser för $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ som uppfyller villkoren är

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

resp.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) En singulärvärdesuppdelning av A ges alltså av

$$A = U\Sigma V^*$$

där

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Eftersom M är övertriangulär, så är egenvärdena de tal som står på diagonalen, dvs. 2 och 5. Egenvärdet 2 har algebraisk multiplicitet 3, och egenvärdet 5 har algebraisk multiplicitet 1. Vi beräknar nu egenrummen:

- För egenvärdet 2: vi löser det homogena ekvationssystemet

$$(M - 2I)\vec{x} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \iff x_2 = 0 \text{ och } x_4 = 0.$$

Egenrummet spänns alltså upp av t.ex. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, så den geometriska multipliciteten för detta egenvärde är 2.

- För egenvärdet 5: här är den algebraiska multipliciteten 1, och därför är den geometriska multipliciteten det också (eftersom den alltid är åtminstone 1 och alltid är högst lika med den algebraiska). Eftersom vektorn $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ uppenbarligen är en egenvektor med egenvärdet 5, så spänner den upp hela egenrummet.

Matrisen M är alltså inte diagonaliserbar eftersom det inte finns en bas för $\mathbb{R}^4$ (eller $\mathbb{C}^4$) som består av egenvektorer för M. (En sådan bas skulle kräva 4 linjärt oberoende vektorer.)

Svar: Egenvärdena för M är 2 och 5. En bas för egenrummet till 2 är $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, och en bas för egenrummet till 5 är $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Matrisen M är inte diagonaliserbar.

(b) Eftersom λ är ett egenvärde till A, så finns det en nollskild vektor v sådan att $Av = \lambda v$. Detta kan skrivas om som

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Enligt definitionen av (matris)$\cdot$(vektor) så är $(A - \lambda I)v$ en linjärkombination av kolonnerna i $A - \lambda I$, där koefficienterna i linjärkombinationen är komponenterna i vektorn v: om $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ och kolonnerna i $A - \lambda I$ är $c_1, c_2, \ldots, c_n$, så är

$$(A - \lambda I)v = v_1 c_1 + v_2 c_2 + \cdots + v_n c_n.$$

Alltså säger $(A - \lambda I)v = 0$ precis att

$$v_1 c_1 + v_2 c_2 + \cdots + v_n c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

och eftersom v är nollskild, så är inte alla v_i lika med noll. Därför är kolonnerna i $A - \lambda I$ linjärt beroende, enligt definitionen av linjärt beroende.

Eftersom kolonnerna i den kvadratiska matrisen $A - \lambda I$ är linjärt beroende, så är raderna i matrisen också linjärt beroende. (Man kan se detta från flera olika kurssatser om kvadratiska matriser, t.ex. via $\det(M^T) = \det(M)$ och $\det(M) = 0 \iff$ kolonnerna är linjärt beroende.)