MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
22 april 2026

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 poäng ger betyget åtminstone E. Bonuspoäng från terminens kontrollskrivningar ger nedan eventuella tillgodoräkningar (uppgifter som ej behöver besvaras på tentan).

Bonuspoäng	8–15	16–23	24–30
Tillgodoräknas	1a	1a och 1b	hela uppgift 1

Påminnelse.

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}$.
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i kroppen $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. *(Om du tillgodoräknar några deluppgifter i denna uppgift enligt ovan, skriv vilka.)*

   (a) Avgör om mängden (1p)
   $$W = \{p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = p(0)\}$$
   utgör ett delrum till $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ eller inte.

   (b) Låt V vara ett inre produktrum och låt U vara ett delrum till V. Ange definitionen av det *ortogonala komplementet* $U^\perp$. (1p)

   (c) Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella vektorrum. Formulera *dimensionssatsen* för T. (1p)

2. (a) Definiera en linjär avbildning $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ genom (2p)
   $$T(p) = \big(p(-1),\, p(0),\, p(1)\big).$$
   Bestäm matrisen $[T]_B^E$ relativt basen $B = (1, x, x^2)$ för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ och standardbasen E för $\mathbb{R}^3$.

   (b) Visa att T är inverterbar. (1p)

   (c) Beräkna $T^{-1}(1, 0, 3)$. (2p)

3. Betrakta $\mathbb{R}^4$ med sin standard-inreprodukt, och låt
   $$u_1 = (1,1,0,0), \qquad u_2 = (2,0,2,0), \qquad u_3 = (3,-1,1,3), \qquad w = (5,-1,0,2).$$
   Låt U vara delrummet till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av u_1, u_2 och u_3.

   (a) Bestäm en ON-bas för U. (3p)

   (b) Bestäm den ortogonala projektionen $P_U(w)$ av w på U. (2p)

Var god vänd!

4. (a) Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum V. Ange definitionerna av att T är *diagonaliserbar* respektive *ortogonalt diagonaliserbar*. (1p)

   (b) Betrakta $\mathbb{R}^3$ med sin standard-inreprodukt, och låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara operatorn som i standardbasen har matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Avgör om T är diagonaliserbar samt om T är ortogonalt diagonaliserbar.

5. (a) Låt $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av en *singulärvärdesuppdelning* av A. (Var noggrann med att ange exakt vilka egenskaper som krävs av allt som ingår.) (2p)

   (b) Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum och låt $T : V \to V$ vara en linjär operator.

   (a) Ange definitionen av att T är *självadjungerad*. (1p)

   (b) Antag att T är självadjungerad. Visa att varje egenvärde till T är reellt (utifrån kursens definitioner, utan satser). (Ledning: betrakta $\langle T(v), v\rangle$ för något v.) (2p)

   (c) Antag fortfarande att T är självadjungerad. Visa att om u och v är egenvektorer till T med olika egenvärden, så är u och v ortogonala. (Här får del (b) användas; utöver det ska kursens definitioner utgås ifrån, utan hänvisning till någon sats.) (3p)

Rättningen av tentan bör vara färdig inom 3 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan fås från studentexpeditionen:

`https://www.math.su.se/tentaåterlämning`