

**Lösningförslag.**

1. (a) Ja,  $W$  är ett delrum till  $P_2(\mathbb{R})$ . Vi kan använda delrumstestet för att se detta:

- Nollpolynomet  $p = 0$  ligger i  $W$  eftersom  $p(1) = 0 = p(0)$ .
- $W$  är sluten under addition: om  $p, q \in W$  så gäller  $p(1) = p(0)$  och  $q(1) = q(0)$ , så

$$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = p(0) + q(0) = (p + q)(0).$$

- $W$  är sluten under skalärmultiplikation: om  $p \in W$  och  $\alpha \in \mathbb{R}$  så gäller  $p(1) = p(0)$ , så

$$(\alpha p)(1) = \alpha \cdot p(1) = \alpha \cdot p(0) = (\alpha p)(0).$$

- (b) Det ortogonala komplementet till  $U$  definieras som

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ för alla } u \in U\}.$$

- (c) Dimensionssatsen säger att

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim V$$

där  $N(T)$  är nollrummet och  $R(T)$  är bildrummet för  $T$ .

2. (a) Vi beräknar först bilderna av basvektorerna i  $B$ :

$$T(1) = (1, 1, 1), \quad T(x) = (-1, 0, 1), \quad T(x^2) = (1, 0, 1).$$

Eftersom  $E$  är standardbasen för  $\mathbb{R}^3$  fås matrisen  $[T]_B^E$  genom att sätta dessa koordinatvektorer som kolonner. Alltså är

$$[T]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Enligt kurssats så är  $T$  inverterbar om och endast om  $[T]_B^E$  är inverterbar (oavsett val av baser). Vi beräknar, via expansion i andra raden, att

$$\det([T]_B^E) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Alltså är  $[T]_B^E$  inverterbar, och därmed är  $T$  inverterbar.

- (c) Vi skulle kunna beräkna den inverterade matrisen  $([T]_B^E)^{-1} = [T^{-1}]_E^B$  och sedan multiplicera den med koordinatvektorn  $(1, 0, 3)$ , men här utgår vi direkt från definitionen av  $T$  istället.

Vi söker ett polynom  $p(x) = a + bx + cx^2$  sådant att

$$p(-1) = 1, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 3.$$

Detta är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a - b + c &= 1, & a &= 0, & a + b + c &= 3 \\ \iff -b + c &= 1, & b + c &= 3 \\ \iff b &= 1, & c &= 2. \end{aligned}$$

Alltså är

$$T^{-1}(1, 0, 3) = x + 2x^2.$$

3. (a) Vi använder Gram-Schmidts metod på  $u_1, u_2, u_3$ .

Först sätter vi

$$v_1 = u_1 = (1, 1, 0, 0).$$

Sedan sätter vi

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1.$$

Här är

$$\langle u_2, v_1 \rangle = 2, \quad \langle v_1, v_1 \rangle = 2,$$

så

$$v_2 = (2, 0, 2, 0) - (1, 1, 0, 0) = (1, -1, 2, 0).$$

Vidare sätter vi

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2.$$

Vi har

$$\langle u_3, v_1 \rangle = 2, \quad \langle u_3, v_2 \rangle = 6,$$

och

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2, \quad \langle v_2, v_2 \rangle = 6.$$

Alltså blir

$$v_3 = u_3 - v_1 - v_2 = (3, -1, 1, 3) - (1, 1, 0, 0) - (1, -1, 2, 0) = (1, -1, -1, 3).$$

Vi har därmed, enligt Gram-Schmidt satsen, fått en ortogonal bas

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (1, -1, 2, 0), \quad v_3 = (1, -1, -1, 3).$$

Normerna är

$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \quad \|v_2\| = \sqrt{6}, \quad \|v_3\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Alltså är till exempel

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2, 0), \quad e_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, -1, 3)$$

en ON-bas för  $U$ .

- (b) Med ON-basen från del (a) gäller enligt kursats

$$P_U(w) = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \langle w, e_2 \rangle e_2 + \langle w, e_3 \rangle e_3.$$

Utan normeringsfaktorerna ser vi att

$$\langle w, v_1 \rangle = 4, \quad \langle w, v_2 \rangle = 6, \quad \langle w, v_3 \rangle = 12,$$

och därför är

$$P_U(w) = \frac{4}{(\sqrt{2})^2}e_1 + \frac{6}{(\sqrt{6})^2}e_2 + \frac{12}{(2\sqrt{3})^2}e_3.$$

Alltså är

$$P_U(w) = 2(1, 1, 0, 0) + (1, -1, 2, 0) + (1, -1, -1, 3) = (4, 0, 1, 3).$$

4. (a) Operatorm  $T$  sägs vara *diagonaliserbar* om det finns en bas för  $V$  som består av egenvektorer till  $T$ . Ekvivalent: det finns en bas  $B$  i vilken matrisen  $[T]_B^B$  för  $T$  är diagonal.

Operatorm  $T$  sägs vara *ortogonalt diagonaliserbar* om det finns en ortonormal bas för  $V$  som består av egenvektorer till  $T$ . Ekvivalent: det finns en ON-bas  $C$  i vilken matrisen  $[T]_C^C$  för  $T$  är diagonal.

- (b) Vi börjar med att bestämma egenvärdena. Det karakteristiska polynomet är

$$\chi(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t) \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -2 & 3-t \end{pmatrix}$$

via expansion i sista raden. Alltså är

$$\chi(t) = (2-t)(t^2 - 3t + 2) = -(t-2)^2(t-1).$$

Egenvärdena är alltså  $\lambda = 1$  med algebraisk multiplicitet 1 och  $\lambda = 2$  med algebraisk multiplicitet 2.

Eftersom  $\lambda = 1$  har algebraisk multiplicitet 1 så är den geometriska multipliciteten  $\dim E_1 = 1$ . (Den är alltid åtminstone 1, och den kan inte vara större än den algebraiska multipliciteten, så den måste vara exakt 1.)

För  $\lambda = 2$  löser vi  $(A - 2I)x = 0$ :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger  $x_2 = 2x_1$ , medan  $x_3$  är fri. Alltså ges egenrummet för  $\lambda = 2$  av

$$E_2 = \text{span}\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Eftersom

$$\dim E_1 + \dim E_2 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

finns det enligt kurssats en bas för  $\mathbb{R}^3$  bestående av egenvektorer. Alltså är  $T$  diagonaliserbar.

Däremot är  $T$  inte ortogonalt diagonaliserbar: en reell operator är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om dess matris i en ON-bas är ortogonalt diagonaliserbar, och enligt den reella spektralsatsen är en reell matris ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk. Standardbasen är en ON-bas, och matrisen  $A$  i frågan är inte symmetrisk – alltså är  $T$  inte ortogonalt diagonaliserbar.

(Man kan också hitta egenvektorerna till  $\lambda = 1$  uttryckligen och resonera utifrån dem.)

**Svar:**  $T$  är diagonaliserbar, men inte ortogonalt diagonaliserbar.

5. (a) En singularvärdessuppdelning av  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  är en faktorisering

$$A = U\Sigma V^*,$$

där

- $U \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$  är ortogonal,
- $V \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  är ortogonal,
- $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  är diagonal i den meningen att alla eventuellt nollskilda element ligger på huvuddiagonalen,
- diagonalposterna i  $\Sigma$  är singularvärdena till  $A$ , alltså icke-negativa reella tal, ordnade så att

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0.$$

Vidare gäller  $\sigma_1, \dots, \sigma_r > 0$ , där  $r$  är rangen av  $A$ , och resten av singularvärdena är 0.

- (b) Vi börjar med att beräkna

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet är

$$\det(A^*A - tI) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 - 1 = (t-3)(t-1).$$

Alltså är egenvärdena 3 och 1, så singularvärdena är

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = 1,$$

vilket ger oss matrisen  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

På det vanliga sättet kan vi se att vi till egenvärdet 3 kan ta egenvektorn  $(1, 1)$ , och till egenvärdet 1 egenvektorn  $(1, -1)$ . Efter normering får vi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Vi sätter alltså

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nu beräknar vi motsvarande kolonner i  $U$ :

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

För att  $U$  ska vara ortogonal, kompletterar vi med en tredje enhetsvektor ortogonal mot både  $u_1$  och  $u_2$ , till exempel

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1).$$

Då kan vi ta

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

**Svar:** En singularvärdessuppdelning av  $A$  ges av  $A = U\Sigma V^*$ , där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Operatoren  $T$  är självadjungerad om  $T = T^*$ , där  $T^*$  är den adjungerade avbildningen till  $T$ . Det vill säga om

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

för alla  $x, y \in V$ .

- (b) Låt  $\lambda \in \mathbb{C}$  vara ett egenvärde till  $T$  och låt  $v \neq 0$  vara en motsvarande egenvektor. Då gäller, per definition,

$$T(v) = \lambda v.$$

Vi betraktar talet  $\langle T(v), v \rangle$ . Å ena sidan får vi, eftersom inre produkten är linjär i första argumentet,

$$\langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.$$

Å andra sidan, eftersom  $T$  är självadjungerad, gäller

$$\langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle,$$

eftersom inre produkten är konjugatlinjär i andra argumentet.

Alltså gäller

$$\lambda \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Eftersom  $v \neq 0$  är  $\langle v, v \rangle > 0$ , och det följer att

$$\lambda = \bar{\lambda},$$

dvs.  $\lambda$  är reellt.

- (c) Antag att

$$T(u) = \lambda u, \quad T(v) = \mu v,$$

där  $\lambda \neq \mu$  är de motsvarande egenvärdena. Av del (b) vet vi att  $\lambda$  och  $\mu$  är reella tal. Nu beräknar vi  $\langle T(u), v \rangle$  på två sätt. Enligt egenvärdesekvationen för  $u$  gäller det att

$$\langle T(u), v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle.$$

Eftersom  $T$  är självadjungerad ger egenvärdesekvationen för  $v$  att

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle,$$

eftersom  $\mu$  är reellt.

Alltså ser vi att

$$\lambda\langle u, v \rangle = \mu\langle u, v \rangle \iff (\lambda - \mu)\langle u, v \rangle = 0.$$

Eftersom  $\lambda \neq \mu$  måste

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Alltså är  $u$  och  $v$  ortogonala.