

Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 poäng ger betyg åtminstone E. Inga tillgodoräkningar från kontrollskrivningar kan göras på denna tenta.

Påminnelse.

- $P_n(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$ -vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}$.
- $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ står för $\mathbb{F}$ -vektorrummet av $m \times n$ -matriser med element i kroppen $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) Avgör om funktionen $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av (1p)

$$T(p(x)) = p(1) - p(-1)$$

är en linjär avbildning eller inte.

- (b) Låt $T : V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning mellan två vektorrum. Ange definitionerna (1p)
av *nollrummet* $N(T)$ och *bildrummet* $R(T)$.
- (c) Låt U, V, W vara vektorrum med ordnade baser B, C respektive D , och låt $S : U \rightarrow V$ (1p)
och $T : V \rightarrow W$ vara linjära avbildningar. Formulera en sats som relaterar matriserna
(i de respektive baserna) för avbildningarna S, T och sammansättningen $T \circ S$.

2. Låt $V \subseteq \mathbb{R}^3$ vara delrummet till $\mathbb{R}^3$ som ges av (5p)

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Definiera en linjär avbildning $T : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ genom

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3).$$

Bestäm nollrummet $N(T)$, visa att T är en isomorfi (dvs. är bijektiv), samt beräkna $T^{-1}(2, 5)$.

3. (a) Låt $T : V \rightarrow V$ vara en linjär operator på ett ändligt dimensionellt vektorrum V över (1p)
en kropp $\mathbb{F}$. Definiera vad det innebär att T är *diagonaliserbar*.
- (b) Betrakta operatoren $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ som ges av (4p)

$$T(p(x)) = xp'(x) + p(1).$$

Bestäm matrisen $[T]_E^E$ relativt basen $E = (1, x, x^2)$ för $P_2(\mathbb{R})$. Bestäm sedan samtliga egenvärden för T och en bas för varje motsvarande egenrum, och avgör om T är diagonaliserbar.

Var god vänd!

4. Betrakta $\mathbb{R}^3$ med inre produkten

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Definiera $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ via

$$T(a, b) = (a, a + b, b)$$

låt $U = R(T)$ vara bildrummet till T , och låt $v = (1, 2, 6)$.

- (a) Bestäm en bas för $U^\perp$. (2p)
- (b) Finn $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ sådan att $v - T(a_0, b_0) \in U^\perp$. (2p)
- (c) Beräkna det minsta avståndet mellan v och U enligt normen som definieras av den angivna inre produkten (dvs. beräkna $\min_{u \in U} \|v - u\|$). (1p)

5. (a) Låt $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Ange definitionerna av att A är *självadjungerad* respektive *unitär*. (2p)
- (b) Beräkna en singularvärdessuppdelning av matrisen (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Formulera den reella spektralsatsen för matriser i $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. (2p)
- (b) Låt $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ vara en symmetrisk matris och anta att varje egenvärde λ till A är icke-negativt, dvs. $\lambda \geq 0$. Visa att det finns en symmetrisk matris $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, också med icke-negativa egenvärden, sådan att $B^2 = A$. (Med andra ord: A har en 'positiv kvadratrots' B som också är symmetrisk.) (2p)
- (c) Hitta en matris B som i den förra delen, för (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Rättningen av tentan bör vara färdig inom 3 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en kopia av tentan fås från studentexpeditionen:

<https://www.math.su.se/tentaaterlarning>