

Lösningsförslag.

1. (a) Ja, T är linjär. För $p, q \in P_3(\mathbb{R})$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller

$$\begin{aligned} T(p+q) &= (p+q)(1) - (p+q)(-1) \\ &= (p(1) - p(-1)) + (q(1) - q(-1)) \\ &= T(p) + T(q) \end{aligned}$$

och

$$T(\alpha p) = (\alpha p)(1) - (\alpha p)(-1) = \alpha \cdot p(1) - \alpha \cdot p(-1) = \alpha(p(1) - p(-1)) = \alpha T(p).$$

Alltså uppfyller T definitionen för linjäritet.

- (b) Nollrummet och bildrummet till T definieras som

$$N(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

respektive

$$R(T) = \{T(v) : v \in V\} = \{w \in W : \text{det finns } v \in V \text{ sådan att } T(v) = w\}.$$

- (c) För de angivna baserna ges matrisen för sammansättningen av

$$[T \circ S]_B^D = [T]_C^D [S]_B^C.$$

Matrisen för sammansättningen relativt de angivna baserna ges alltså av produkten av matriserna för de individuella avbildningarna (relativt sina respektive baser), i den angivna ordningen.

2. En vektor $(x_1, x_2, x_3) \in V$ ligger i $N(T)$ om och endast om

$$x_1 - x_2 = 0 \text{ och } x_2 - x_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3.$$

Att vektorn ligger i V betyder att $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, vilket betyder att ovan gäller om och endast om $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Därmed är

$$N(T) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Från kurssats medför detta att T är injektiv, eftersom T är en linjär avbildning.

Vidare är $\dim V = 2$, vilket kan ses på ett par olika sätt. Genom att identifiera V som nollrummet $N(S)$ av den linjära avbildningen $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av $S(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, som uppenbarligen har bildrum $R(S) = \mathbb{R}$, så ser vi från dimensionssatsen att $\dim V = 2$. Alternativt kan vi se att

$$V = \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\},$$

och att de två angivna vektorerna är linjärt oberoende.

Alltså är T en injektiv linjär avbildning mellan två vektorrum av samma (ändliga) dimension, och är därför enligt kurssats även surjektiv.

Alltså är T bijektiv och därmed en isomorfi.

För att beräkna $T^{-1}(2, 5)$ söker vi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ med

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 2, \quad x_2 - x_3 = 5.$$

Om vi löser detta ekvationssystem på sedvanligt sätt (Gausseliminering) får vi att

$$T^{-1}(2, 5) = (3, 1, -4).$$

Svar: $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$, och $T^{-1}(2, 5) = (3, 1, -4)$.

3. (a) Operatoren T sägs vara *diagonaliserbar* om det finns en bas för V som består av egenvektorer till T . Ekvivalent: det finns en bas B för V sådan att matrisen $[T]_B^B$ är diagonal.

- (b) Vi beräknar T 's verkan på vektorerna i basen E :

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 1 + x, \quad T(x^2) = 1 + 2x^2.$$

Genom att sätta koordinatvektorerna (relativt E) för dessa polynom som kolonner får vi

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen är övertriangulär, så dess egenvärden är elementen på diagonalen, dvs. $\lambda = 1$ med algebraisk multiplicitet 2, och $\lambda = 2$ med algebraisk multiplicitet 1.

Nu bestämmer vi en bas för respektive egenrum. För $\lambda = 1$ löser vi

$$([T]_E^E - I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $c = 0$ och sedan $b = 0$, medan a är fri. Det motsvarande egenrummet är därför

$$E_1 = \text{span}\{1\}.$$

För $\lambda = 2$ löser vi på motsvarande sätt

$$([T]_E^E - 2I) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $b = 0$ och $c = a$, så egenrummet E_2 ges av

$$E_2 = \text{span}\{1 + x^2\}.$$

Ur egenrummen kan man alltså sammanlagt välja högst två linjärt oberoende egenvektorer, och eftersom detta är mindre än $\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ så är T inte diagonaliserbar.

Svar: Matrisen är $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är 1 och 2, med egenrum $E_1 = \text{span}\{1\}$ respektive $E_2 = \text{span}\{1 + x^2\}$. Operatoren T är inte diagonaliserbar.

4. (a) Vi börjar med att titta på avbildningen under T av standardbasvektorerna till $\mathbb{R}^2$: låt

$$u_1 = T(1, 0) = (1, 1, 0), \quad u_2 = T(0, 1) = (0, 1, 1).$$

Då är $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$. En vektor $z = (z_1, z_2, z_3)$ ligger i $U^\perp$ om och endast om den är ortogonal mot både u_1 och u_2 , det vill säga om

$$\langle z, u_1 \rangle = z_1 + 2z_2 = 0 \quad \text{och} \quad \langle z, u_2 \rangle = 2z_2 + z_3 = 0.$$

Detta är ekvivalent med $z_1 = z_3 = -2z_2$, så

$$U^\perp = \text{span}\{(2, -1, 2)\}.$$

En bas för $U^\perp$ är således $\{(2, -1, 2)\}$.

- (b) För $a, b \in \mathbb{R}$ är

$$w := v - T(a, b) = (1 - a, 2 - a - b, 6 - b).$$

Villkoret $w \in U^\perp$ är ekvivalent med att w är ortogonal mot u_1 och u_2 , eftersom dessa spänner upp U . Detta ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w, u_1 \rangle = (1 - a) + 2(2 - a - b) = 5 - 3a - 2b, \\ 0 &= \langle w, u_2 \rangle = 2(2 - a - b) + (6 - b) = 10 - 2a - 3b. \end{aligned}$$

Vi ska alltså lösa

$$3a + 2b = 5, \quad 2a + 3b = 10,$$

vilket ger $a = -1$ och $b = 4$. Därför kan vi ta

$$(a_0, b_0) = (-1, 4).$$

En kontroll ger

$$v - T(-1, 4) = (1, 2, 6) - (-1, 3, 4) = (2, -1, 2) \in U^\perp.$$

- (c) Eftersom $T(-1, 4) \in U$ och $v - T(-1, 4) \in U^\perp$ är $T(-1, 4)$ den ortogonala projektionen av v på U . Det minsta avståndet är därför

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \|v - u\| &= \|v - T(-1, 4)\| \\ &= \|(2, -1, 2)\| \\ &= \sqrt{2^2 + 2(-1)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Notera att normen här kommer ifrån den i uppgiften angivna inre produkten.

Svar: En bas för $U^\perp$ är $\{(2, -1, 2)\}$, vi kan ta $(a_0, b_0) = (-1, 4)$ och det minsta avståndet är $\sqrt{10}$.

5. (a) Låt $A^* = \overline{A}^T$ beteckna adjungatet till A . Matrisen A är *självadjungerad* om

$$A = A^*,$$

och den är *unitär* om

$$A^*A = AA^* = I_n.$$

(b) Vi börjar med att beräkna

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet är

$$\begin{aligned} \det(A^*A - tI) &= (14 - t)(6 - t) - 9 \\ &= t^2 - 20t + 75 \\ &= (t - 15)(t - 5). \end{aligned}$$

Alltså är singularvärdena

$$\sigma_1 = \sqrt{15}, \quad \sigma_2 = \sqrt{5},$$

och vi tar

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Till egenvärdet 15 för A^*A kan vi välja den normerade egenvektorn

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och till egenvärdet 5 kan vi välja

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vektorerna v_1, v_2 utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^2$, så vi sätter

$$V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

De första två kolonnerna i U bestäms av $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$. Vi får

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{15}} A \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} A \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

För att få en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ kompletterar vi med

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

som är normerad och ortogonal mot både u_1 och u_2 . Vi kan alltså ta

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Svar: En singularvärdesuppdelning av A ges av $A = U\Sigma V^*$, där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Den reella spektralsatsen säger att en matris $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om den är symmetrisk. M.a.o, för en reell matris A gäller $A = A^T$ om och endast om det finns en ortogonal matris Q och en reell diagonalmatris D sådana att

$$A = QDQ^T.$$

Kolonnerna i Q utgör då en ON-bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A , och diagonalelementen i D är de motsvarande reella egenvärdena.

- (b) Enligt den reella spektralsatsen finns det en ortogonal matris Q och en diagonalmatris

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sådana att

$$A = QDQ^T.$$

Per antagandet i uppgiften är $\lambda_i \geq 0$ för varje i . Sätt

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = QD^{1/2}Q^T.$$

Eftersom $D^{1/2}$ är diagonal har vi

$$B^T = (QD^{1/2}Q^T)^T = QD^{1/2}Q^T = B,$$

så B är symmetrisk. Vidare är kolonnerna i Q egenvektorer till B med egenvärden $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, som alla är icke-negativa. Slutligen, eftersom $Q^TQ = I$, får vi

$$B^2 = QD^{1/2}Q^TQD^{1/2}Q^T = QDQ^T = A.$$

Matrisen B har alltså alla de önskade egenskaperna.

- (c) Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

har egenvärdet 16 med en normerad egenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ och egenvärdet 4 med en normerad egenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Vi kan därför ta

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D^{1/2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Konstruktionen från del (b) ger

$$B = QD^{1/2}Q^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Som kontroll gäller

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = A.$$

Dessutom är B symmetrisk och har de icke-negativa egenvärdena 4 och 2.