MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Bashar Saleh

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
20 oktober 2023

Uppgifter med lösningsförslag.

1. (a) **(1p)** Låt V och W vara två vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$. Definiera vad det innebär för en funktion $T\colon V \to W$ att vara en linjär avbildning.

   (b) **(4p)** Låt $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} 2p(0) \\ p(1) \\ 3p'(-1) \end{pmatrix}.$$

   Är T inverterbar? Om ja, beräkna $T^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Om nej, undersök om $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ligger i bildrummet.

   (Tips: bestäm matrisen för T relativt standardbaserna.)

Lösning. (a) T är linjär om den (i) bevarar addition; $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ för varje $v_1, v_2 \in V$, och (ii) bevarar multiplikation med skalärer; $T(av) = aT(v)$ för varje $a \in \mathbb{F}$ och $v \in V$.
(Alternativt: T är linjär om den bevarar linjärkombinationer; $T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2)$ för alla $a, b \in \mathbb{F}$ och $v_1, v_2 \in V$.)

(b) Vi finner matrisen för T relativt standardbaserna för $P_2(\mathbb{R})$ och $\mathbb{R}^3$. Vi har att

$$T(1) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}$$

vilket ger att matrisen A för T relativt standardbaserna är matrisen vars kolonner är $T(1)$, $T(x)$ och $T(x^2)$, d.v.s.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Kofaktorexpansion av denna matris längs rad 1 ger

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6-3) = -18.$$

Eftersom determinanten av A är nollskild, så är A inverterbar, vilket ger att T är inverterbar. Matrisen för T^{-1} relativt standardbaserna ges av A^{-1} vilket vi räknar ut på sedvanligt vis till att vara

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Vi har att

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{4}{9}\\ \frac{1}{18}\end{pmatrix},$$

vilket är koordinatvektorn för $p(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{9}x+\frac{1}{18}x^2$. Detta innebär att $T^{-1}(1,1,1)^t=\frac{1}{2}+\frac{4}{9}x+\frac{1}{18}x^2$.

2. (a) **(2p)** Låt $A\in M_n(\mathbb{F})$ vara en diagonaliserbar matris. Är A^j diagonaliserbar för alla positiva heltal j?

(b) **(2p)** Betrakta matrisen

$$A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -1 & 8\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}).$$

Är A diagonaliserbar? Om ja, finn en inverterbar matris Q så att $Q^{-1}AQ$ är en diagonalmatris.

(c) **(1p)** Bestäm A^{100} där A är matrisen från (b)-delen. Elementen i matrisen kan uttryckas i termer av linjärkombinationer av potenser av reella tal.

Lösning. (a) Om v är en egenvektor till A med egenvärde λ så gäller att

$$A^jv=A^{j-1}Av=A^{j-1}\lambda v=\lambda A^{j-2}Av=\lambda^2A^{j-2}v=\cdots=\lambda^jv,$$

d.v.s. v är också en egenvektor för A^j (men med egenvärde λ^j). Eftersom A är diagonaliserbar så existerar det en bas $\{v_1,\ldots,v_n\}$ för $\mathbb{F}^n$ beståendes av egenvektorer till A. Men dessa är även egenvektorer till A^j enligt ovan, vilket ger att A^j är diagonaliserbar.

(b) Vi börjar med att beräkna egenvärdena för A genom att finna nollställena för det karakteristiska polynomet för A

$$f_A(t)=\begin{vmatrix}7-t & -6\\ -1 & 8-t\end{vmatrix}=t^2-15t+50.$$

Det karakteristiska polynomet har nollställena $t=5$ och $t=10$, vilket är egenvärdena för A. Vi bestämmer egenrummen för var och ett av egenvärdena. Vi har att $E_5=N(A-5I_2)$ vilket är lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases}2x_1 & - & 6x_2 & = & 0\\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 0.\end{cases}$$

Med hjälp av sedvanlig Gauss-elimination får vi då att $E_5=\operatorname{span}\{(3,1)^t\}$. På liknande sätt beräknar vi att $E_{10}=\operatorname{span}\{(-2,1)^t\}$. Vi har nu att $\beta=\{(3,1)^t,(-2,1)^t\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$ beståendes av egenvektorer till A, vilket ger att A är diagonaliserbar. Vi låter Q vara matrisen vars kolonner är vektorerna i β

$$Q=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Nu följer det att $Q^{-1}AQ=\operatorname{diag}(5,10)$.

(c) Vi har att

$$A^{100}=(Q\operatorname{diag}(5,10)Q^{-1})^{100}=Q\operatorname{diag}(5^{100},10^{100})Q^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{100} & 0\\ 0 & 10^{100}\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{3\cdot5^{100}+2\cdot10^{100}}{5} & \frac{6\cdot5^{100}-6\cdot10^{100}}{5}\\ \frac{5^{100}-10^{100}}{5} & \frac{2\cdot5^{100}+3\cdot10^{100}}{5}\end{pmatrix}.$$

□

3. (a) **(2p)** Låt V vara ett n-dimensionellt inre produktrum och låt $y \in V$ vara ett nollskilt element i V. Låt $T: V \to \mathbb{F}$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(v) = \langle v, y \rangle.$$

Bestäm rangen för T och dimensionen av nollrummet till T. (Tips: använd dimensionssatsen)

(b) **(3p)** Betrakta inre produkten på $M_2(\mathbb{R})$ given av

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Bestäm en bas för nollrummet till $T: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = \langle A, y \rangle$ där $y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösning. (a) Eftersom y är nollskild så har vi att $\langle y, y \rangle > 0$. Det följer nu att T är surjektiv ty för varje $\lambda \in \mathbb{F}$ så har vi att

$$T\left(\frac{\lambda}{\langle y, y \rangle} y\right) = \left\langle \frac{\lambda}{\langle y, y \rangle} y, y \right\rangle = \frac{\lambda}{\langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle = \lambda.$$

Detta innebär att $R(T) = \mathbb{F}$ och därmed har vi att

$$\operatorname{rank}(T) = \dim(R(T)) = \dim(\mathbb{F}) = 1.$$

Enligt dimensionssatsen så ges dimensionen av nollrummet $N(T)$ av

$$\dim(N(T)) = \dim(V) - \operatorname{rank}(T) = n - 1.$$

(b) Vi har att $N(T)$ ges av alla 2×2-matriser $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ som uppfyller till ekvationen

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2a_{11} + a_{12} - a_{21} + 0a_{22} = 0.$$

Lösningsmängden ges av $\begin{cases} a_{11} = \frac{s-r}{2} \\ a_{12} = r \\ a_{21} = s \\ a_{22} = t \end{cases}$ där $t, s, r \in \mathbb{R}$. Det följer då att

$$N(T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vi vet från förra deluppgiften att $\dim(N(T)) = 3$ och därför måste $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ vara en bas för $N(T)$. □

4. (a) **(1p)** Definiera begreppet ”ON-bas” för ett inre produktrum. Du kan utgå från att begreppet ”bas” redan är känt.

(b) **(2p)** Betrakta inre produkten på $P_1(\mathbb{R})$ given av

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)(1+x)dx.$$

Bestäm en ON-bas för $P_1(\mathbb{R})$ relativt denna inre produkt.

(c) **(2p)** Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till $W = \operatorname{span}\{x\}$ betraktat som ett delrum till inre produktrummet $P_1(\mathbb{R})$ definierat i (b)-delen.

Lösning. (a) En ON-bas är en bas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ för inre produktrummet som uppfyller

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(b) Vi applicerar Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess på standardbasen $\{1, x\}$ och får på så sätt en ON-bas $\{e_1, e_2\}$. Vi har att

$$\|1\|^2 = \int_0^1 (1+x)dx = [x + x^2/2]_0^1 = \frac{3}{2}$$

vilket ger att

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|}1 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Låt $v_2^\perp$ vara den ortogonala projektionen av x på det ortogonala komplementet $\operatorname{span}\{e_1\}^\perp$:

$$v_2^\perp = x - \langle x, e_1 \rangle e_1 = x - \frac{2}{3}\int_0^1 (x + x^2)dx = x - \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = x - \frac{5}{9}$$

Normering av $v_2^\perp$ ger e_2:

$$\|v_2^\perp\|^2 = \left\langle x - \frac{5}{9}, x - \frac{5}{9} \right\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{5}{9}\right)^2 (1+x)dx = \frac{13}{108}$$

$$\Rightarrow \quad e_2 = \frac{1}{\|v_2^\perp\|} v_2^\perp = \sqrt{\frac{108}{13}} \left(x - \frac{5}{9}\right).$$

(c) Ett godtyckligt polynom i $P_1(\mathbb{R})$ är på formen $a + bx$, där $a, b \in \mathbb{R}$. Vi har att

$$\langle a + bx, x \rangle = \int_0^1 (a+bx)x(1+x)dx = (ax + bx^2)(1+x) = \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{bx^4}{4}\right]_0^1 = \frac{10a + 7b}{12}$$

Vi ser att $a + bx$ är ortogonalt mot x om och endast om $10a + 7b = 0$ d.v.s. om och endast om $a = -\frac{7b}{10}$. Speciellt har vi att ett polynom är ortogonalt mot x om och endast om det är ett element i $\operatorname{span}\{-7/10 + x\} = \operatorname{span}\{-7 + 10x\}$. Ett element är ortogonalt x om och endast om det är ortogonalt mot varje element i $\operatorname{span}\{x\}$. Från detta drar vi slutsatsen att det ortogonala komplementet till $\operatorname{span}\{x\}$ är $\operatorname{span}\{-7 + 10x\}$. $\square$

5. (a) **(1p)** Låt $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ vara en matris. Bevisa att om λ är ett egenvärde för A^*A, då gäller det att $\lambda \geq 0$. (Ledning: det kan vara användbart att använda att $\langle v, v \rangle = v^*v$ för standard inre produkten på $\mathbb{C}^n$.)

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C}).$$

Lösning. (a) Låt $v \in \mathbb{C}^n$ vara en egenvektor till A^*A med egenvärde λ. Då har vi att

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = v^*A^*Av = \langle Av, Av\rangle \geq 0.$$

Eftersom $\langle v, v\rangle > 0$ (egenvektorer är per definition nollskilda) så följer det att $\lambda \geq 0$.

(b) Vi ska finna en singulärvärdes uppdelning på formen $A = U\Sigma V^*$. Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

vars karakteristiska polynom ges av

$$f_{A^*A}(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -i \\ i & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 3.$$

Egenvärdena för A^*A ges av nollställena till $f_{A^*A}(t)$ vilka är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 1$. Detta ger oss de singulära värdena $\sigma_1 = \sqrt{3} \geq \sigma_2 = 1$ som i sin tur ger att

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

För att bestämma V finner vi egenvektorer till A^*A som utgör en ON-bas för $\mathbb{C}^2$. Vi har att $E_3 = N(A^*A - 3I_2)$ vilket ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger att $E_3 = \operatorname{span}\{(-i, 1)^t\}$. Vi har att normen av $(-i, 1)^t$ ges av

$$\|(-i,1)^t\| = \sqrt{\langle(-i,1)^t, (-i,1)^t\rangle} = \sqrt{(-i)\overline{(-i)} + 1\cdot\overline{1}} = \sqrt{(-i)i + 1\cdot 1} = \sqrt{2}.$$

En ON-bas för E_3 är därmed $\left\{\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$.

På liknande sätt räknar vi ut att $E_1 = N(A^*A - I_2) = \operatorname{span}\{(i, 1)^t\}$ som har ON-bas $\left\{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$. Vi låter nu V vara matrisen med kolonner givna av ON-baserna för egenrummen:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nu räknar vi ut U genom att bestämma dess kolonner u_1, u_2, u_3. Låt v_i vara i:te kolonn i A, och då har vi att

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

och

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi finner nu en vektor $(a,b,c)^t$ som mot både u_1 och u_2, vilket är ekvivalent till att vara ortogonalt mot både $(-i,i,2)^t$ och $(i,i,0)$, d.v.s. löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} \langle (a,b,c)^t, (-i,i,2)^t \rangle = 0 \\ \langle (a,b,c)^t, (i,i,0)^t \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ia - ib + 2c = 0 \\ -ia - ib = 0 \end{cases}$$

En lösning är t.ex. $(a,b,c)^t = (1,-1,-i)^t$. Normerar vi denna vektor får vi $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-i}{\sqrt{3}}\right)^t$.

Vi får då att

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Sammantaget har vi en singulärvärdesuppdelning $A = U\Sigma V^*$ där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

□

6. Låt V vara ett reellt vektorrum av ändlig dimension. Låt $T: V \to V$ vara en linjär operator på V.

   (a) **(1p)** Att T är ortogonalt diagonaliserbar är ekvivalent med en annan egenskap för T enligt spektralsatsen. Vilken egenskap är det? (OBS! V är ett reellt vektorrum.)

   (b) **(2p)** Kan T vara diagonaliserbar och normal utan att vara ortogonalt diagonaliserbar?

   (c) **(2p)** Betrakta $\mathbb{R}^2$ med en inre produkt given av

   $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

   och låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara given av

   $$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm $T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösning. (a) Enligt spektralsatsen är en linjär operator på ett reellt inre produktrum ortogonalt diagonaliserbar om och endast om T är självadjungerad.

(b) Om T är normal så är matrisen $A = [T]_\beta$ för T relativt en ON-bas β normal. Om T är diagonaliserbar så är A diagonaliserbar. Betraktar vi A som en komplex matris så har vi att A är både ortogonalt diagonaliserbar (spektralsatsen för komplexa matriser) och har enbart reella egenvärden (ty den är diagonaliserbar som en reell matris). Från spektralsatsen följer det att en komplex matris är ortogonalt diagonaliserbar och har endast reella egenvärden om och endast om den är självadjungerad, d.v.s att $A^* = A$. Låt oss nu betrakta A som en reell matris. Eftersom vi har härlett att A är självadjungerad så är den därmed ortogonalt diagonaliserbar. Slutsats: Det är omöjligt för en linjär operator på ett reellt inre produktrum att vara diagonaliserbar och normal utan att vara ortogonalt diagonaliserbar.

(c) Vi noterar att standardbasen $\{(1,0)^t, (0,1)^t\}$ är en ortogonal bas, där $\|(1,0)^t\| = \sqrt{2}$ och $\|(0,1)^t\| = 1$. Normering av dessa vektorer ger en ON-bas $\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^t, (0,1)^t\}$.

Vi har att

$$T\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

vilket ger att första kolonnen i $[T]_\beta$ är $(3,-\frac{1}{\sqrt{2}})^t$. Vi har även att

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=-2\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

vilket ger att andra kolonnen i $[T]_\beta$ är $(-2\sqrt{2},4)^t$ $\square$

Sammantaget har vi att

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix}3&-2\sqrt{2}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&4\end{pmatrix}$$

Eftersom β är en ON-bas har vi även att

$$[T^*]_\beta=[T]_\beta^*=\begin{pmatrix}3&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-2\sqrt{2}&4\end{pmatrix}$$

Relativt standardbasen har vi att

$$[T^*]_{st}=[\mathrm{Id}]_\beta^{st}[T^*]_\beta[\mathrm{Id}]_{st}^\beta=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-2\sqrt{2}&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-\frac{1}{2}\\-4&4\end{pmatrix}$$

Vi har att

$$T^*\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=[T]_{st}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-\frac{1}{2}\\-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan tentan hämtas ut från studentexpeditionen under öppettiderna: tisdagar 11:45-12:45.