MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Tentamensskivning i
Analys B, 7.5 hp
den 5 juni 2019

Problemdel

1 Visa att kurvintegralen

$$\int_\gamma \big(2xyz(y+z)+y^2z^2\big)dx+\big(2xyz(x+z)+x^2z^2\big)dy+\big(2xyz(x+y)+x^2y^2\big)dz$$

är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbb{R}^3$, och bestäm kurvintegralens värde då γ är en kurva från punkten $(1,-1,0)$ till $(0,1,-1)$. **(5p)**

2 Ange konvergensradien R för serien

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}z^k.$$

Låt $f(z)$ beteckna seriens summa då $|z|<R$. Visa att

$$\frac{d}{dt}(tf(t))=\frac{t}{1-t},\quad -R<t<R.$$

Beräkna

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k(k+1)}.$$

(5p)

3 Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$ där Γ är övre delen (motsvarar $z>0$) av snittet mellan $x^2+y^2+z^2=2Rx$ och $x^2+y^2=2rx$, $0<r<R$ genomplupet en gång moturs (med avseende på projektion på xy-planet.). **(5p)**

4 Låt C vara cirkeln av radie 10 med centrum i origo som är tagen ett varv moturs i det komplexa talplanet. Beräkna integralerna:

(a)

$$\int_C \frac{\cos z}{z}dz;$$

(2p)

(b)

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2}dz.$$

(3p)

Var god vänd!

Teoridel

5 Formulera Greens formel. Bevisa den för områden på formen $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, $a \leq x \leq b$ Förklara hur beviset behöver modifieras om området är på formen $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$, $c \leq y \leq d$ (det räcker med en kortfattad förklaring, utan detaljerade beräkningar). Skissa sedan hur man får Greens formel för mer allmänna områden i planet. **(4p)**

6 Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. **(4p)**

7 Låt $\mathbf{F}$ vara ett fält $\mathbf{F} \in C^2(\Omega)$ där $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ med $\text{div}\mathbf{F} = 0$ och $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Ange vilka av de följande utsagor är sanna (samt korta motiveringar för dina svar!). I fall att utsagan är falsk tillägg ett villkor sådant att den nya utsagan är sann.

(a) För varje enkel sluten kurva γ i Ω gäller $\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$.

(b) För varje C^1-yta ∂K som är rand till en kropp $K \subset \Omega$ gäller $\iint_{\partial K} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. **(2p)**

LYCKA TILL!

Skrivningsåterlämning onsdag den 12 juni kl 10:00 i sal 16, därefter i rum 204, hus 6.