MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentamen i
Analys B, 7.5 hp
den 5 juni2019

Problemdel

1 . Antag att det finns en potential $P(x,y,z)$. Den måste lösa ekvationssystem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} &= 2xyz(y+z)+y^2z^2, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} &= 2xyz(x+z)+x^2z^2, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} &= 2xyz(x+y)+x^2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcl} & P(x,y,z) &=& x^2yz(y+z)+xy^2z^2+f_1(y,z), \\ \Rightarrow & P(x,y,z) &=& xy^2z(y+z)+x^2yz^2+f_2(x,z), \\ & P(x,y,z) &=& xyz^2(y+z)+x^2y^2z+f_3(x,y). \end{array}$$

Man kan välja P lika med

$$P(x,y,z) = xyz(xy+xz+yz).$$

Insättning av ändpunkterna ger

$$\int_\gamma \big(2xyz(y+z)+y^2z^2\big)dx + \big(2xyz(x+z)+x^2z^2\big)dy + \big(2xyz(x+y)+x^2y^2\big)dz$$

$$= P(0,1,-1) - P(1,-1,0) = 0 - 0 = 0.$$

2 Konvergensradien R av serien $\sum a_k z^k$ i uppgiften kan beräknas som

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1} = 1.$$

Högerledet till differentialekvationen kan utvecklas i en potensserie som

$$\frac{t}{1-t} = t(1+t+t^2+\ldots) = t+t^2+t^3+\ldots$$

Utvecklingen av vänsterledet kan beräknas som

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\Big(tf(t)\Big) &=& f(t)+tf'(t) \\ &=& \frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^2+\ldots+\frac{1}{k+1}t^k+\ldots+t\Big(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}t+\ldots+\frac{k}{k+1}t^{k-1}+\ldots\Big) \\ &=& t+t^2+\ldots+t^k+\ldots \end{array}$$

Vi får

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{tf(t)}_{=:\, g(t)}\Big) = \frac{t}{1-t}.$$

Den nya funktionen $g(t)$ löser diff ekvationen:

$$g'(t) = \frac{t}{1-t} \Rightarrow g(t) = t - \ln(1-t) + C.$$

Konstanten C måste väljas lika med 0 eftersom $g(0)=0$, alltså vi har

$$tf(t) = t - \ln(1-t) \Rightarrow f(t) = 1 - \frac{1}{t}\ln(1-t).$$

Värdet i punkten 1/3 kan nu beräknas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)} = f(1/3) = 1 - 3\ln 2/3.$$

3 Med hjälp av Stokes sats kan den önskade integralen skrivas som

$$I = \int\int_{\Omega} \text{rot}\,(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS,$$

där $\mathbf{F} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$ och Ω är den delen av ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad z > 0$ som projekteras på $x^2 + y^2 \leq 2rx$. $\mathbf{F}$:s rotation ges av formeln

$$\text{rot}\,(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_x \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 2(y - z, z - x, x - y).$$

Om man parameteriserar Ω som $\Phi = (x, y, \sqrt{2Rx - x^2 - y^2})$ där (x, y) uppfyller $x^2 + y^2 \leq 2rx$ kan man skriva om I på formen

$$I = \int\int_{x^2+y^2 \leq 2rx} \text{rot}\,(\mathbf{F}) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dxdy.$$

Vidare gäller $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = (-\psi_x, -\psi_y, 1)$ där $\psi = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$. Enkla beräkningar ger

$$\psi_x = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}, \quad \psi_y = \frac{-y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}.$$

Alltså

$$I = 2\int\int_D \left(\frac{(y - \sqrt{2Rx - x^2 - y^2})(x - R)}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} + \frac{y(\sqrt{2Rx - x^2 - y^2} - x)}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} + (x - y)\right) dxdy,$$

där $D = \{x^2 + y^2 \leq 2rx\}$. Notera att $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$. Efter några förenklingar får

$$I = 2R\int\int_D \left(1 - \frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}\right) dxdy = 2R\int\int_D dxdy = 2\pi R r^2.$$

Integralen $2R\int\int_D -\frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} dxdy = 0$ eftersom funktionen är udda i variabeln y.

4 a) Eftersom $\cos z$ är analytisk i det hela complexa talplanet (och därmed särkilt i den relevanta cirkelskivan) kan vi använda Cauchys formel och får

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Alternativt kan man även argumentera på följande sätt:

Integranden är en analytisk funktion utanför origo, som ligger inom cirkeln C. Funktionen $\cos z$ kan utvecklas i potensserie som

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

Detta implicerar att funktionen $\frac{\cos z - 1}{z}$ är analytisk i origo och kan ignoreras när man beräknar integralen

$$\int_C \frac{\cos z}{z} dz = \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

b) Här kan Cauchys formel inte användas direkt. Men vi kan skriva om integranden med hjälp av potensserieutvecklingen av $\cos z$:

$$\frac{\cos z}{z^2} = \ldots = \frac{1}{z^2} + h(z),$$

där h är analytisk i $\mathbb{C}$. Därmed blir integralen

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2} dz = \int_C \left(\frac{1}{z^2} + h(z) \right) dz = \int_C \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

Alternativt kan vi använda samma resonemang som ovan eftersom funktionen $\frac{\cos z - 1}{z^2}$ är också analytisk i origo. Detta innebär

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2} dz = \int_C \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

7 a) falsk. (dock sant om kurvan γ ej omslutar y-axeln, då kan man använda Stokes sats)
b) sant, pga Gauss sats (obs även ∂K måste förutsättas ligga inom Ω).