MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys B, 7.5 hp
den 1 juni 2020

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. *Låt parametern B vara lika med sista siffran i ditt personnummer.*

1. *Betrakta integralen* *5 p*

$$\iiint_D \frac{4z}{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}dxdydz.$$

(a) Använd rymdpolära koordinater för att beräkna integralen ovan över mängden

$$D = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, x+y \le 0,\, z \ge 0\}.$$

(b) Bestäm värdet av integralen över mängden

$$D = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

(a) Vi använder rymdpolära koordinater

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= r\cos\vartheta, \end{aligned}$$

och får de nya gränserna

$$\begin{aligned} 1 \le r \le 2, &\quad \text{ty } 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{7\pi}{4} &\quad \text{ty } x+y \le 0 \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} &\quad \text{ty } z \ge 0. \end{aligned}$$

Med $dxdydz = r^2\sin\vartheta\, drd\varphi d\vartheta$ blir integralen

$$\iiint_D \frac{4z}{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\int_1^2 \frac{4r\cos\vartheta}{1+\frac{r^2\sin^2\vartheta}{r^2}}r^2\sin\vartheta\, drd\varphi d\vartheta =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{1+\sin^2\vartheta}d\vartheta \cdot \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 1 d\varphi \cdot \int_1^2 r^3 dr = 2\Big[\ln(1+\sin^2\vartheta)\Big]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^2 = \ldots = \frac{15\pi}{2}\ln 2.$$

(b) Integrationsområdet är symmetriskt med avseende på z, dvs om en punkt (x_0, y_0, z) ligger i D, så ligger även punkten $(x_0, y_0, -z)$ i området. Eftersom funktionen f är udda i z, dvs $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$, är integralen noll.

Svar: a) $\underline{\frac{15\pi}{2}\ln 2}$ b) $\underline{0}$.

2. *Betrakta*

$$\int_\gamma \left(\frac{\pi\cos(\pi x)}{x^2+y^2} - \frac{2x\sin(\pi x)}{(x^2+y^2)^2} + y + B\right)dx + \left(-\frac{2y\sin(\pi x)}{(x^2+y^2)^2} + x\right)dy.$$

OBS: Använd ditt värdet på B som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(a) *Beräkna kurvintegralen, där kurvan γ går medurs längs ellipsen $x^2+9y^2=9$ från punkten $(0,1)$ till punkten $(-3,0)$.* *5 p*

(b) *Ange alla satser som du behöver i (a) och förklara hur du har använt dem.* *T 2 p*

Anmärkning: Om i satsens formulering förekommer t.ex. ett område Ω, så ange hur du har valt Ω i exemplet, samt redovisa varför alla satsens förutsättningar är uppfyllda.

(a) Eftersom direkt beräkning av kurvintegralen verkar leda till komplicerade integraler försöker vi hitta en potential, dvs vi letar efter en funktion $U(x,y)$ sådan att

$$\begin{aligned} U'_x(x,y) &= \frac{\pi\cos(\pi x)}{x^2+y^2} - \frac{2x\sin(\pi x)}{(x^2+y^2)^2} + y + B \\ U'_y(x,y) &= -\frac{2y\sin(\pi x)}{(x^2+y^2)^2} + x. \end{aligned}$$

Från den andra ekvationen får vi $U(x,y) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2+y^2} + xy + h(x)$, derivation och den första ekvationen ger $h'(x) = B$, dvs $h(x) = Bx + C$. Därmed har vi hittat en potential

$$U(x,y) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2+y^2} + xy + Bx$$

och kurvintegralen är lika med $U(-3,0) - U(0,1) = \ldots = -3B$.

(b) Vi har använt satsen som säger att existens av en potential är ekvivalent med att kurvintegralen är oberoende av vägen (Sats 3 på sida 349). Mer precis:

Sats: Låt Ω vara ett öppet bågvis sammanhängande område i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbf{F}$ ett kontinuerlig vektorfält i Ω. Då har $\mathbf{F}$ en potential om och endast om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$ är oberoende av vägen.

I exemplet kan vi då välja mängden $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, då är $\mathbf{F}$ kontinuerlig i Ω.

OBS: Om man vill försäkra sig att det finns en potential, så behöver men en annan sats. Den förutsätter dock att området är enkelt sammanhängande (annars funkar inte Greens sats). I så fall kan man t.ex välja området som hela planet utom strålen $\{(-t,t) : t \in [0,\infty)\}$. Men vi har inte gjort det i lösningen ovan, utan fått existensen av potentialen genom att ange den!

3. (a) *Formulera Gauss sats med alla förutsättningar.* *T 2 p*

(b) *Verifiera Gauss sats för fältet $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ och kroppen* *5 p*

$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le B+1\},$$

dvs beräkna både flödesintegralen och trippelintegralen och jämför svaret.
OBS: Använd ditt värde av B som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(a) Gauss' sats är sats 1 på sida 368.

(b) Vi observerar först att kroppen K är den delen av kägeln $x^2+y^2 \le z^2$ som har spetsen i origo och går uppåt fram till $z = B+1$. Vi börjar med att beräkna

$$\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{u}\,dxdydz = \int_0^{B+1}\left(\iint_{x^2+y^2\le z^2} 3(x^2+y^2+z^2)dxdy\right)dz.$$

Genom att använda polära koordinater i dubbelintegralen blir integralen lika med

$$3\int_0^{B+1}\int_0^{2\pi}\int_0^z (r^2+z^2)r\,dr\,d\varphi\,dz = \ldots = \frac{9\pi}{10}(B+1)^5.$$

För att beräkna flödesintegralen konstaterar vi att randen ∂K består av två delar, kägelmanteln och locket.
Manteln kan parametriseras som

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le t \le B+1.$$

Normalvektorn till manteln blir då

$$\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t\sin\varphi \\ t\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\cos\varphi \\ -t\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}.$$

Eftersom vektorn pekar inåt kroppen K behöver vi $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ -t \end{pmatrix}$. Därmed är flödesintegralen genom manteln

$$\iint_{mantel} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{B+1}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} t^3\cos^3\varphi \\ t^3\sin^3\varphi \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ -t \end{pmatrix} d\varphi dz = \int_0^{B+1}\int_0^{2\pi} t^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 1) d\varphi dt.$$

För att integrera med avseende på φ skriver vi m integranden med hjälp av formler för dubbel vinkel

$$\cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 1 = \cos^2\varphi(1-\sin^2\varphi) + \sin^2\varphi(1-\cos^2\varphi) - 1 = \ldots = \frac{1}{4}(\cos 4\varphi - 1)$$

och får så att integralen är vidare lika med

$$\frac{(B+1)^5}{5}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\cos 4\varphi - 1) d\varphi = \ldots = -\frac{\pi}{10}(B+1)^5.$$

Locket kan parametriseras som

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ B+1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le t \le B+1.$$

Normalvektorn till manteln blir då

$$\mathbf{r}'_r \times \mathbf{r}'_\varphi = \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix},$$

som är rätt orienterad, ty den pekar utåt. Flödesintegralen genom locket blir då

$$\iint_{lock} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{B+1}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} * \\ * \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} d\varphi dz = \ldots = (B+1)^5\pi.$$

Därmed blir flödesintegralen genom randen av kägeln lika med

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{mantel} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{lock} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\pi}{10}(B+1)^5 + (B+1)^5\pi = \frac{9\pi}{10}(B+1)^5.$$

4. *(a) Betrakta potensserien* *3 p*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n} x^n.$$

i. Bestäm seriens konvergensradie.
ii. Ange alla punkter $x \in \mathbb{R}$ sådana att serien konvergerar.
iii. Ange en mängd $M \subset \mathbb{R}$ sådan att serien konvergerar likformigt i M.

(b) Betrakta serien *2 p*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}(x-1)^n.$$

i. Bestäm seriens konvergensradie.
ii. Ange alla punkter $x \in \mathbb{R}$ sådana att serien konvergerar.

(c) Definiera begreppen likformigt konvergent funktionsföljd och likformigt konvergent funktionsserie. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. T 2 p

(a) i. Vi betraktar

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+2)\cdot 2^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n} = 2\frac{n+2}{n+1} \to 2 \text{ då } n \to \infty,$$

och därmed är konvergensradien $R = 2$.
ii. Vi undersöker randen av konvergensintervallet, dvs punkterna $x = \pm 2$:
$\underline{x = 2}$: serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ är divergent
$\underline{x = -2}$: serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ är betingat konvergent.
Därmed konvergerar potensserien alltså för $-2 \le x < 2$.
iii. Enligt satsen om konvergensradie vet vi att potensserien konvergerar likformigt i varje kompakt delmängd av det öppna intervallet $(-R, R)$, t.ex. $[0, 1]$.
(b) i. Vi betraktar

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!}{5^n} \cdot \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{5}{n+1} \to 0 \text{ då } n \to \infty,$$

och därmed är konvergensradien $R = 0$.
ii. Eftersom $R = 0$ finns bara en enda punkt då potensserien konvergerar, nämligen då $|x-1| = 0$, dvs $x = 1$.

(c) Definitioner 6.1 och 7.1 samt Anmärkning 6.1 i kompendiet.

Svar: a) $\underline{\text{i. } R = 1, \text{ ii. } -2 \le x < 2, \text{ iii. t.ex. } [0,1]}$ b) $\underline{\text{i. } R = 0, \text{ ii. } x = 1}$.

5. Låt R_1 och R_2 vara konvergensradien till potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, respektive $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
Visa: Om $|a_n| \le |b_n|$ för alla $n \ge 0$ så är $R_1 \ge R_2$. *T 2 p*

Låt z_0 vara en punkt med $|z_0| < R_2$ och betrakta partialsummorna

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n z_0^n| = \sum_{n=0}^{N} |a_n| \cdot |z_0|^n \le \sum_{n=0}^{N} |b_n||z_0|^n.$$

Eftersom $|z_0| < R_2$ så är $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n$ absolut konvergent och med olikheten ovan ser vi att då är även serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ absolut konvergent, vilket innebär att $|z_0| \le R_1$. Alltså har vi visat att $R_2 \le R_1$.

OBS: OM man visste att både $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ och $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$ existerar kunde man även använda formeln för konvergensradien för att visa olikheten.

6. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ *vara vektorfältet* *T 2 p*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2(xz+y)}{x^2+y^2}, \frac{2(yz-x)}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2) \right).$$

och γ_1*,* γ_2 *och* γ_3 *kurvorna*

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0) \\ \gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2) \\ \gamma_3(t) &= (3\cos(t)+6, 3\sin(t), 3). \end{aligned}$$

Vektorfältet $\mathbf{F}$ *är rotationsfritt i sin definitionsmängd, dvs utanför* z*-axeln, men det behöver du inte visa!*

(a) *Visa, med hjälp av Stokes sats, att* $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(b) *Följer ur Stokes sats även* $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$*?*

(a) Kurvan γ_1 är cirkeln i xy-planet med medelpunkt i origo och radie 1 och kurvan γ_2 är cirkeln i planet $z = 2$ med medelpunkt på z-axeln och radie 2. Eftersom båda cirklar går ”runt” z-axeln finns en yta som inte skär z-axeln, dvs ligger helt i definitionsområdet av fältet $\mathbf{F}$, och har precis γ_1 och γ_2 som rand, där kurvorna är orienterade åt motsatt håll. Ett exempel på en sådan yta Y är den delen av kägeln $(\frac{z}{2}+1)^2 = x^2+y^2$ där $0 \le z \le 2$. Randkurvan då $z = 0$ är cirkeln γ_1 och randkurvan då $z = 2$ är cirkeln γ_2, dvs $\partial Y = \gamma_1 - \gamma_2$. Vi kan då använda Stokes sats och, ty fältet är rotationsfritt, får vi

$$0 = \iint_Y \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

alltså

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(b) Kurvan γ_3 är cirkeln i planet $z = 3$ med medelpunkt $(6,0)$ och radie 3 och går därmed inte ”rund” z-axeln. Dvs vi hittar ingen yta vars rand består av γ_1 och γ_3 och som inte skär z-axeln. Därmed kan vi inte använda Stokes sats i denna situation. OBS: Det är intuitivt klart att det inte finns en sådan yta, även om vi inte har visat det strikt.