MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B VT 2021
Lösningar till tentamen 27 maj 2021

LÖSNINGAR

1. a) Vi ser att integranden är positiv, vilket innebär att vi kan använda jämförelsekriteriet för generaliserade integraler. Vi ska visa att integralen är divergent om $B = 1$ och konvergent annars.

Arctan är en begränsad funktion, och för att använda kriteriet behöver vi en övre/undre begränsning på D. Det finns flera sätt att hitta en sån, naturligast är väl att notera att ett minimum kommer att antas på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, eftersom arctan är en växande funktion och sen parametrisera cirkeln och beräkna minimum av $x^4 + y^4$ på cirkeln. Ytterligare ett alternativt är tekniken att optimera med bivillkor:optimera $\arctan(x^4+y^4)$ med bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$.

Här det enklaste argumentet: Om $x^2+y^2 \geq 1$ så är $Max(x^2, y^2) \geq 1/2$ och det medför att $x^4 + y^4 \geq (1/2)^2$. Eftersom arctan är en växande funktion så är alltså

$$\pi/2 \geq \arctan(x^4 + y^4) \geq \arctan(1/4) =: a > 0$$

om $(x, y) \in D$.

Alltså är

$$(\pi/2)^{-1} \int\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^B} dxdy \leq$$

$$\int\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^B \arctan(x^4 + y^4)} dxdy \leq (a)^{-1} \int\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^B} dxdy.$$

Integralen

$$\int\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^B} dxdy = \int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2B}} drd\theta,$$

är en standardintegral, som är konvergent, utom när $B = 1$, se läroboken. Alltså ger olikheterna ovan och jämförelsekriteriet att den studerade integralen är divergent för $B = 1$ och konvergent annars. 3p

b) Enklast är väl $f(x, y) = -1 \leq g(x, y) = 0$. Existensen av sådana funktioner är inte relevant för lösningen i a) eftersom vår funktion där var positiv, och endast i det fallet får vi använda jämförelsekriteriet. 2p

2. a) Randen C är bilden av cirkelskivans rand, d v s cirkeln $u^2+v^2 = 1$, så en parametrisering är bilden av cirkelns standardparametrisering:

$$x(\theta) = (\cos\theta)^3,\ y(\theta) = (\sin\theta)^3,\quad z(\theta) = (\cos\theta)^3,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(Det finns många fler...) 1p

b) C är randen till ytan Y, så man kan använda Stokes sats. Eftersom termerna i $rot\mathbf{F}$ är partiella derivator av koordinatfunktionerna till $\mathbf{F}$, som är konstanta, så är $rot\mathbf{F} = 0$, och alltså ger Stokes sats att

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_Y rot\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = 0.$$

2p

c) Vi har parametriseringen $r(u, v) = (u^3, v^3, u^3)$, vilket ger att $r'_u = (3u^2, 0, 3u^2)$ och $r'_v = (0, 3v^2, 0)$ och får

$$r'_u\ x\ r'_v = (-9u^2v^2, 0, 9u^2v^2) = (9u^2v^2)(-1, 0, 1).$$

En enhetsvektor ska ha längden 1, så $\mathbf{N} = (\mathbf{1}/\sqrt{\mathbf{2}})(-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Detta kunde vi också sett mer direkt från det faktum att $x = z$ på ytan Y, så att Y ligger i ett plan, som har normalen $(-1, 0, 1)$. En enhetsvektor har skalärprodukt med sig själv som är 1, så

$$I := \int\int_Y (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) dS = \int\int_Y dS = \int\int_D |r'_u\ x\ r'_v| dudv,$$

där D är cirkelskivan $u^2 + v^2 \leq 1$. Enligt beräkningen ovan är $|r'_u\ x\ r'_v| = 9\sqrt{2}u^2v^2$ och går vi över till polära koordinater får vi att

$$I = 9\sqrt{2}\int_0^1 r^5 dr \int_0^{2\pi} cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

(Den trigonometriska enkelintegralen beräknas genom att använda formlerna för dubbla vinklar först för sinus oh sedan för cosinus.) 2p

3. a-b) Parametrisera γ som $r(t) = (1+i)t,\ 0 \leq t \leq 1$.Då är $dz = (1+i)dt$ och

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^1 (1+i)t^2 dt = [(1/3)(1+i)^3]_0^1 = (2/3)(i-1).$$

Alternativt kan man notera att den analytiska funktionen z^2 har den primitiva funktionen $F(z) = z^3/3$, är definierad i hela det komplexa talplanet och alltså är kurvintegralen oberoende av vägen(som ska vara styckevis C^1), enligt Cauchys sats, och har värdet $F(1+i) - F(0)$.

c) Det handlar, enligt Cauchys integralsats, om att bestämma poler och residyer för $\frac{Bdz}{z^2-3iz-2}$ och integralen kommer bara att bero på hur polerna ligger i förhållande till C_R. Polerna är $i, 2i$, eftersom kvadratkomplettering eller ledningen ger att $z^2 - 3iz - 2 = (z-2i)(z-i)$. För en liten cirkel E_1 kring polen i blir

$$\int_{E_1} \frac{Bdz}{z^2 - 3iz - 2} = \int_{E_1} \frac{1}{z-i}\frac{B}{z-2i}dz = 2\pi i \frac{B}{i-2i} = -B2\pi.$$

För en liten cirkel E_2 kring polen $2i$ blir

$$\int_{E_2} \frac{Bdz}{z^2 - 3iz - 2} = \int_{E_2} \frac{1}{z-2i}\frac{B}{z-i}dz = 2\pi i \frac{B}{2i-i} = B2\pi.$$

För att $F(R)$ ska vara definierad är det nödvändigt att C_R inte går igenom en pol, så $R \neq 1, 2$. Om $R < 1$ så ligger ingen pol innanför C_R så då är $F(R) = 0$, om $1 < R < 2$ så ligger i, innanför C_R så då är $F(R) = -B2\pi$, och slutligen, om $2 < R$ så ligger både i och $2i$ innanför C_R, så då är $F(R) = -B2\pi + B2\pi = 0$.

2p

4. a-b) Det är förstås läge för ett Weierstrass M. Vi ska hitta en konvergent serie a_n så att

$$|\frac{\sin(n)}{z^2+n^2}|.$$

Först observerar man att $|\sin(n)| \leq 1$, så den termen är oväsentlig. Dessutom räcker det att titta på termerna i serien från ett visst fixt n och uppåt. Vi vet att $1.1 \leq |z| \leq 1.9$ så en variant av triangelolikheten ger $|z^2 + n^2| \geq n^2 - 1.9^2 > 0$ om $n \geq 2$. Inverterar vi, fås (NÄR $n \geq 2$)

$$|\frac{\sin(n)}{z^2+n^2}| \leq a_n = \frac{1}{n^2 - 1.9^2}.$$

Genom att jämföra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med den känt konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ så ser vi att den första också är konvergent. Med Weierstrass M-test får vi att den ursprungliga serien konvergerar likformigt, och enligt en sats i kursen är då gränsfunktionen kontinuerlig, eftersom partialsummorna är detta.

c) Argumentet ovan fungerar i vilket slutet intervall som helst av formen $|z| \in [1+\epsilon, 2-\epsilon]$, för $0 < \epsilon < 1$. Alltså är funktionen kontinuerlig i varje punkt i $]1,2[$; en sån punkt tillhör ju för ett lämpligt ϵ ett av dessa intervall. Eftersom de två första termerna i serien har poler i i respektive $2i$, kan inte funktionen vara kontinuerlig för $|z|$ i ett större intervall.

5. a) Greens sats-läge! Fältet (P, Q) som ska integreras uppfyller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$(lätt räkning), och alltså är

$$\int_C \frac{(y-B)dx - (x+2)dy}{(y-B)^2 + (x+2)^2} - \int_E \frac{(y-B)dx - (x+2)dy}{(y-B)^2 + (x+2)^2} = 0,$$

om E är en liten cirkel kring fältets singularitet $(x, y) = (-2, B)$. Parametrisera E: $x = -2 + r\cos t$, $y = B + r\sin t$. Då är $(y - B)^2 + (x+2)^2 = r^2$, och

$$\int_E \frac{(y-B)dx - (x+2)dy}{(y-B)^2 + (x+2)^2} = \int_E \frac{-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{r^2} = -2\pi.$$

b) Det är precis de cirkelskivor som inte innehåller fältets singularitet $(x, y) = (-2, B)$, eftersom fältet uppfyllde villkoret i Greens sats. 2p

6. Normalen Låt C vara alla punkter (x, y, z) sådana att $x^2 + (4B)^2y^2 = 1$.(Alltså en slags cylinder på ellipsen $x^2 + (4B)^2y^2 = 1$ i xy-planet.) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y, 2yz, y^2 + B)$.

a) Rita upp ytan! En normal till ytan fås från $f(x, y, z) := x^2 + (4B)^2y^2 = 1$ som

$$\mathbf{E} = (f'_x(x, y), f'_y(x, y), f'_z(x, y)) = (2x, 2(4B)^2y, 0).$$

Denna är uppnbarligen alltid parallell med xy-planet, och vinkelrät mot z-axeln. (Kolla skalärprodukten med z-axelns riktningsvektor $(0, 0, 1)$ vid tvivel.)

Vidare ger en uträkning att

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = (0, 0, -1),$$

och alltså är skalärprodukten mellan normalen ovan och rot$\mathbf{F}$ noll, så de är vinkelräta mot varandra.

2p

b) Detta följer ur Stokes sats och a).Så här. Kolla först att villkoren för att använda Stokes sats är uppfyllda. Låt sedan Y vara ett område orienterat så att dess rand är $\gamma_1 + (-\gamma_2)$(Varför finns ett sådant Y?). Då är enligt Stokes sats och a),

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot dr + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dr = \int \int_Y \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \frac{N}{|N|} dA = 0,$$

vilket tillsammans med $\int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dr = -\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dr$, ger resultatet. 3p