MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator:Rikard Bøgvad

Analys B HT 2021
Lösningar till tentamen 10 januari 2022

LÖSNINGAR

1. a) En parametrisering av kurvan är t ex $\mathbf{r}(y) = (y^2, y),\ 0 \le y \le 2$, och en tangentvektor i $\mathbf{r}(y)$ ges då av $\mathbf{r}'(y) = (2y, 1)$. Me denna parametrisering är kurvintegralen

$$\int_\gamma xdx + ydy = \int_0^2 (y^2 \cdot 2y + y)dy = [(2/4)y^4 + y^2/2]_0^2 = 10.$$

b) För att visa exaktheten letar vi efter en funktion $F(x, y)$ som är potentialfunktion till fältet

$$(\frac{2y}{1+(xy)^2}, \frac{2x}{1+(xy)^2}).$$

Lös först $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2y}{1+(xy)^2} \iff F(x, y) = 2\arctan(xy) + g(y)$ och sätt sedan in detta sista uttryck i $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x}{1+(xy)^2}$ för att se att $g'(y) = 0$, och att $F(x, y) = 2\arctan(xy)$ är en potential. Alltså är differentialen exakt.

c) Enligt b) och Greens sats är

$$\int_\gamma (\frac{2y}{1+(xy)^2})dx + (\frac{2x}{1+(xy)^2} + x)dy = -\int\int_{ABC} dxdy.$$

(Minustecknet kommer sig av att orienteringen på kurvan γ är den motsatta mot orienteringen av randen till triangelskivan ABC.) Den sista integralen är arean a av triangeln ABC som kan räknas ut med hjälp av en vektorprodukt mellan de två vektorerna AB och AC(eller en lämplig determinant): $a = (1/2)|(10, -1, 0)x(4, 4, 0)| = 22$.
Alltså är svaret -22.

2. a) (**TEORI**) Som i 1b) letar man efter en potential U så att $gradU = F$. Man inser med succesiv integration att $U(x, y, z) = xyz$ är en sådan. Därmed är fältet konservativt och speciellt är $\mathbf{r}otF = \mathbf{r}ot(gradU) = 0$ (se s 388 i PB.)

b) För punkter på skivan är $z = -x + 2y$ och (x, y) ligger i en cirkelskiva B med radie 2 och centrum i origo. Därför kan en lämplig parametrisering vara

$$\mathbf{s}(x, y) = (x, y, -x + 2y),$$

där $(x, y) \in B$. Nu ges arean av skivan E av

$$A = \int\int_B |\mathbf{s}'_x \times \mathbf{s}'_y| dxdy,$$

och vektorprodukten i integralen fås till $(1, -2, 1)$ med längden $\sqrt{6}$. Alltså är

$$A = \sqrt{6} \int\int_B dxdy = 4\sqrt{6}\pi.$$

(Integralen i det sista uttrycket är ju arean av en cirkelskiva med radie 2.)

c) Börja med enhetsnormalen. Eftersom E ligger i ett plan har den en normal, som syns direkt från planets ekvation, nämligen $((1, -2, 1)$. Som vi såg i b) har denna längden $\sqrt{6}$ och därför är en (av två) enhetsnormaler till E given av $\mathbf{N} = (1/\sqrt{6})(1, -2, 1)$. Vidare är enligt a) $\mathbf{r}otF = 0$, och vi behöver därför bara beräkna $\mathbf{r}ot(x+2y, x+2y, x+2z) = (0, -1, -1)$. Alltså är skalärprodukten

$$(\mathbf{r}otG) \cdot N = 1/\sqrt{6}.$$

Nu säger Stokes sats att

$$\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_E (\mathbf{r}otG) \cdot N dS = (1/\sqrt{6}) \int\int_E dS,$$

d v s den sökta integralen är $(1/\sqrt{6})A$ där A är arean av E som vi fick till $4\sqrt{6}\pi$ i b). Svar 4π.

(Man kollar med s 379 i PB att kriteriet om orienteringar i Stokes sats är uppfyllt).

3. a) (**TEORI**)Att funktionsföljden $f_n(x), n = 1, 2...$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ for $x \in [-2, 2]$, betyder enligt definitionen att för varje $\epsilon > 0$ finns ett n_0 så att $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ för ALLA $x \in [-2, 2]$ och alla $n > n_0$. Vidare vet vi att $|\arctan(x)| < \pi/2 < 2$. Detta kan vi sätta ihop till att $f_n(x)g(x)$ konvergerar likformigt.

Fixera ett $\epsilon > 0$. Då finns ett n_1 så att $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ för alla $x \in [-2, 2]$ och alla $n > n_1$. Då är också

$$|f(x)g(x) - f_n(x)g(x)| = |f(x) - f_n(x)||g(x)| < (\epsilon/2) \cdot 2 = \epsilon,$$

alla $x \in [-2, 2]$ och alla $n > n_1$. Det betyder att $f_n(x)g(x)$ konvergerar likformigt mot $f(x)g(x)$. Eftersom varje kontinuerlig funktion har ett största värde på ett kompakt intervall fungerar samma bevis, något modifierat för vilken kontinuerlig funktion $g(x)$ som helst.

b) Eftersom $|\cos x| \leq 1$ gäller att $|\frac{(\cos(x))^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$. Det är känt från PB att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergerar, så Weierstrass M-kriterium ger att den studerade serien konvergerar likformigt mot en funktion definierad på hela $\mathbb{R}$, inte bara på $[-1, 1]$. Av satser om likformig konvergens följer det att gränsfunktionen är kontinuerlig.

4. a) (**TEORI**) Man vet att en funktion är analytisk omm den uppfyller CR-liketerna, och om $f(z), g(z)$ är analytiska så är deras produkt det också(liksom summan). Alltså uppfyller funktionen $zf(z)$ också Cauchy-Riemanns ekvationer.(Alternativt kan man förstås bevisa det genom att dela upp $f(z) = g(z) + ih(z)$ och $z = x + iy$ i imaginär och realdel, multiplicera ihop dem och räkna på).

b) Man kan parametrisera kurvan: $z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta\pi/2$. Då blir

$$\int_\gamma z dz = \int_0^{\pi/2} e^{i\theta} \cdot (ie^{i\theta} d\theta) = [(i/2i)e^{i2\theta}]_0^{\pi/2} = -1/2 - 1/2 = -1.$$

Alternativt kan man notera att den komplexa derivatan $(z^2/2)' = z$, så att integralen (enligt teorin) är $[z^2/2]_1^i = -1$.

c) (**TEORI**) Integralen i b) är oberoende av vägen γ från 1 till i eftersom integranden är analytisk.

d) Partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{z^2 - 3z} = (1/3)(\frac{1}{z-3} + \frac{-1}{z-3})$$

ger att integranden har residyerna $-1/3$ i punkten $z = 0$ och $1/3$ i punkten $z = 3$. Cirkeln med radie 1 omsluter bara polen i origo; alltså är enligt Cauchys residyteorem

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 3z} = (-1/3) \cdot 2\pi i.$$

5. Tillämpa Gauss sats: $div\mathbf{u} = 2z$, så

$$\int\int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \int\int\int_K 2z dx dy dz$$

där K är halvklotet $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0$. Randen ∂K består dels av S och dels av cirkelskivan $D : (x-1)^2 + y^2 \leq 4$ i xy-planet. D har enhetsnormal $N = (0, 0, -1)$ och alltså är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{N} = -z^2 = 0$ på D. Därmed är också $\int\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = 0$ och den sökta flödesintegralen är lika med

$$\int\int\int_K 2z dx dy dz.$$

I rymdpolära koordinater

$$x = 1 + r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$$

kan K beskrivas med olikheterna

$$0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Jakoianen är $r^2 \sin\theta$, så

$$\int\int\int_K 2z dx dy dz = \int_0^2 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\cos\theta d\theta.$$

Den enda integral i produkten som inte är omedelbar är den sista. Omskrivningen $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ ger att $\int_0^{\pi/4} 2\sin\theta\cos\theta d\theta = [-(1/2)\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = 1$. Alltså är flödesintegralens värde $(2^4/4) \cdot 2\pi = 8\pi$.

6. a) (**TEORI**) Jakobianen av en lineär transformation är determinanten av transformationens matris. Denna detrminant är densamma i vilket ON-system som helst, och vi kan hitta ett ON-system med två vektorer i planet som hör till speglingen och en som är en enhetsnormal till planet. I en sådan bas är speglingens matris en diagonalmatris med två 1 och en -1 på sin diagonal. Alltså har speglingen determinanten och jakobianen $J = -1$. Speglingen tar K^+ till K^-. Variabelbyte i trippelintegraler ger nu att

$$\int\int\int_{K^+} f(\mathbf{x}) dx dy dz = \int\int\int_{K^-} f(\sigma(\mathbf{x}))|J| dx dy dz = \int\int\int_{K^-} f(\mathbf{x}) dx dy dz.$$

b) Låt σ vara speglingen i yz-planet. Då gäller att $f(x) = |x|p(x^2)$ är en funktion så att $f(\sigma(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$ och alltså är

$$\int\int\int_{K^+} (|x|p(x^2))dxdydz = \int\int\int_{K^-} (|x|p(x^2))dxdydz.$$

Men i K^- är $xp(x^2) = -|x|p(x^2)$ och i K^+ är $xp(x^2 = |x|p(x^2)$, så vi får att

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int\int\int_K (xp(x^2)+1)dxdydz = \\
&\textstyle\int\int\int_{K^+} (|x|p(x^2))dxdydz \quad - \displaystyle\int\int\int_{K^-} (|x|p(x^2))dxdydz + \int\int\int_K dxdydz = \\
= &\textstyle\int\int\int_K dxdydz \quad = (4/3)\pi.
\end{aligned}$$

Detta kan också formuleras som att $xp(x^2)$ är en udda funktion i x och därför tar $\int\int\int_{K^-} xp(x^2)dxdydz$ och $\int\int\int_{K^+} xp(x^2)dxdydz$ ut varandra.