MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
3 januari 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

Problemdel

1. Beräkna kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{F} = (y^2, x^2 + 2)$$

(a) från $(-1, 0)$ till $(0, 2)$ längs med en axelparallell ellips vars storaxel är två gånger längre än dess lillaxel. (3p).

(b) längs med en cirkelbåge från $(-1, 0)$ till $(0, 1)$ (2p).

Lösningsförslag:

I både (a) och (b) finns det flera ellipser respektive cirklar som uppfyller kraven. Eftersom $\mathbf{F}$ ej är ett potentialfält kan vi förvänta oss att olika val ger olika svar.

Låt oss i (a) välja ellipsen $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$, samt den längre ellipsbågen som förbinder $(-1, 0)$ med $(0, 2)$. Vi kan parametrisera detta kurvstycke som

$$x(t) = \cos t \quad \text{och} \quad y(t) = 2\sin t, \quad -\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Då fås $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, 2\cos t)$ samt $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (4\sin^2 t, \cos^2 t + 2)$, vilket ger

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 t, \cos^2 t + 2) \cdot (-\sin t, 2\cos t) dt = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t + 2\cos^3 t - 4\sin^3 t) dt.$$

Den sista integralen kan beräknas med standardmetoder, och vi får

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 8.$$

Även i (b) finns det flera olika valmöjligheter. Låt oss välja cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ och den kortare cirkelbågen som förbinder $(-1, 0)$ och $(0, 1)$. Låt oss beräkna en kurvintegral över parametriseringen

$$x(t) = \cos t \quad y(t) = \sin t, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

och vända tecken för att få den sökta kurvintegralens värde. Vi har $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ samt $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin^2 t, \cos^2 t + 2)$ och erhåller

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos t + \cos^3 t - \sin^3 t) dt = -\frac{10}{3}.$$

Kurvintegralen av $\mathbf{F}$ över den kortare cirkelbågen som förbinder $(-1, 0)$ med $(0, 1)$ på enhetscirkel har alltså värdet $\frac{10}{3}$.

2. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (yz, xz, y^2 + x^2 + z)$$

ut ur den halva ellipsoiden

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 3z^2 = 4, z > 0\}.$$

Lösningsförslag:

Vi observerar först att det givna vektorfältet har polynomiella komponenter, vilket speciellt ger vid handen att $\mathbf{u}$ är av klass C^∞ i hela $\mathbb{R}^3$. Ellipsoiden $\mathcal{E}$ är vidare en slät yta, dock ej sluten.

Vi önskar beräkna den efterfrågade flödesintegralen $\iint_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS$ med hjälp av Gauss sats. Låt $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$ beteckna cirkelskivan i xy-planet som har centrum i origo och radie lika med 2. Vi observerar att

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = (0, 0, x^2 + y^2)$$

och att en utåtriktad enhetsnormal för $\mathcal{C}$ ges av $(0, 0, -1)$. Således fås

$$\iint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = -\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) dxdy = -8\pi$$

där den sista integralen kan beräknas i polära koordinater.

Gauss sats ger nu att

$$\iint_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{\mathcal{C}} u \cdot \mathbf{N} dS = \int_K \operatorname{div} \mathbf{u} \, dxdyxz,$$

där $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 4, z \geq 0\}$ är en halv solid ellipsoid. Efter omskrivning fås

$$\iint_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = -\iint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS + \int_K \operatorname{div} \mathbf{u} \, dxdyxz$$

Vi har $\operatorname{div} \mathbf{u} = 1$, och därmed $\int_K \operatorname{div} \mathbf{u} dxdyxz = \operatorname{Vol}(K) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}$, antingen från den kända formeln för volymen av en ellipsoid, eller efter variabelbyte.

Slutligen erhåller vi från detta $\iint_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = 8\pi(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}})$.

3. (a) Beräkna rotationen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3 + \pi \sin(\pi z)) \quad (2p)$$

(b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u}$ längst med en rät linje från $(1, 2, 2)$ till $(3, 5, -2)$. (3p)

Lösningsförslag:

(a)

Okulär besiktning av det givna vektorfältet leder till gissningen att $\mathbf{u}$ är ett potentialfält, med en potential given av

$$U(x, y, z) = x^2y^3z^4 - \cos(\pi z),$$

och en beräkning av $\operatorname{grad} U$ bekräftar detta. Vi drar oss därefter till minnes en sats från kursen som utsäger att ett potentialfält är virvelfritt (viz. PB2, Sats 3, s.392). Således har vi $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ i hela $\mathbb{R}^3$t.

Alternativt kan $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ beräknas på sedvanligt sätt med hjälp av formell determinanträkning. Även detta leder till slutsatsen att $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) Från (a) vet vi att det givna vektorfältet $\mathbf{u}$ är ett potentialfält: antingen har vi redan angivit en potential, eller så kan satsen om existens av potential för virvelfria fält i enkelt sammanhängande områden utnyttjas.

För potentialfält gäller

$$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}),$$

oberoende av val av kurva som förbinder $\mathbf{b}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Insättning ger nu

$$\int_{\text{linje}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(3,5,-2) - U(1,2,2) = 17999 - 127 = 17872.$$

Den sökta kurvintegralens värde är således 17872.

4. (a) Funktionen $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - x$ är realdelen av en analytisk funktion $f(z)$. Vilken av följande funktioner kan ses som en imaginärdel till $f(z)$? (2p)

$$(a)\, v(x,y) = -y^3 + 3x^2y^2 - y \quad (b)\, v(x,y) = -y^3 + 3x^2y^2 + y$$

$$(c)\, v(x,y) = -y^3 + 3x^2y - y \quad (d)\, v(x,y) = x^{10}y^{100} - xy + \sin(x + y^9).$$

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^3 - z}$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \frac{1}{2}\}$. (3p)

Lösningsförslag:

(a)

Ansätt funktionen

$$f(z) = -z + z^3.$$

Om $z = x + iy$ fås då att $\mathrm{Re} f(z) = -x^3 + 3xy^2 - x$ samt $\mathrm{Im} f(z) = -y^3 + 3x^2y - y$. Vi ser nu att $u = \mathrm{Re} f$ samt att $v = \mathrm{Im} f$ för funktionen i alternativ (c). Eftersom f är analytisk uppfyller u, v Cauchy-Riemanns ekvationer. Eftersom v då är entydigt bestämd upp till en konstant, kan vi genast utesluta funktionerna i (a), (b) samt (d).

Endast funktionen $v = -y^3 + 3x^2y - y$ som ges i alternativ (c) kan ses som imaginärdel till en analytisk funktion vars realdel är den givna funktionen u. Samma slutsats kan dras genom att beräkna de partiella derivatorna för u och de olika funktionerna i (a)-(d) och observera att Cauchy-Riemanns ekvationer måste vara satisfierade för att funktionerna u och v skall vara real- respektive imaginärdel av en analytisk funktion f.

(b)

Vi observerar att polynomet som förekommer i integrandens nämnare kan brytas upp i linjära faktorer enligt $z^3 - z = z(z^2 - 1) = z(z-1)(z+1)$. Integranden kan alltså skrivas

$$\frac{e^z}{z^3 - z} = \frac{g(z)}{z},$$

där funktionen

$$g(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}$$

är analytisk på varje cirkelskiva med centrum i origo vars radie är mindre än 1.

Vi kan nu tillämpa Cauchys integralformel på g för att erhålla

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^3 - z} = \int_\gamma \frac{g(z)}{z} dz = 2\pi i g(0) = -2\pi i.$$

Teoridel

5. (a) Formulera definitionen av ett *konservativt fält*, även kallat *potentialfält.* (1p)

   (b) Formulera vad som menas med att en kurvintegral är *oberoende av vägen.* (1p)

   (c) Visa att om $\vec{u} = (P, Q)$ är ett konservativt fält så är $\int_\gamma \vec{u} \cdot d\vec{r}$ oberoende av vägen. (3p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se exempelvis PB2, s. 344.

   (b) Se exempelvis PB2, s. 344.

   (c) Se exempelvis PB, s. 345-346 (cf. s 389-390).

6. (a) Formulera *Cauchy-Riemanns ekvationer.* (1p)

   (b) Ge ett exempel på en funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som inte uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. (1p)

   (c) Antag att $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ är en funktion för vilken

   $$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

   existerar i varje punkt $z \in \mathbb{C}$. Visa att real-och imaginärdelarna av f satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer. (3p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se exempelvis K, s.2.

   (b) Funktionen $f(z) = \bar{z} = x - iy$ är ett exempel, funktionen $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ ett annat.

   (c) Se exempelvis K, sats 3.1.

Skrivningen beräknas vara rättad fredag 13 januari 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.