

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x^3 - \sin y, y^3 + e^z \cos(xz), z^3 + z^2 - xy)$$

ut ur enhetsklotet i \mathbb{R}^3 .

2. (a) Undersök huruvida vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + y + z, y^2, 3z)$$

är konservativt. (2p)

(b) Beräkna kurvintegralen av \mathbf{u} längst med den rätta linjen som förbinder $(1, 1, 1)$ med $(2, 3, 2)$. (3p)

3. (a) **(Teoriuppgift)** Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vara av klass C^2 . Bevisa att $\text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u} = (2xy^2, 2x^2y, z^{10})$ längs med den cirkel i planet $2021x - 2022y + 2023z = 1$ som har mittpunkt i $(0, 1, 1)$ och radie 13. (2p)

4. (a) **(Teoriuppgift)** Är funktionen $f(z) = e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1$ analytisk i mängden $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{5}{4}\}$? Är funktionen $g(z) = 1/(z^3 - z^2 - 16z + 16)$ analytisk i samma mängd? Motivera dina svar! (1p)

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 16z + 16} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{5}{4}\}$ är orienterad medurs. (2p)

(c) **(Teoriuppgift)** Ange samtliga satser du har använt för att lösa (b). (1p)

5. Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 1]$.

(a) **(Teoriuppgift)** Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f . Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f . (1p)

(b) **(Teoriuppgift)** Visa att om $\{f_k\}$ konvergerar likformigt mot f , så är f en kontinuerlig funktion på $[0, 1]$. (3p)

(c) **(Teoriuppgift)** Konvergerar den specifika följden $f_k(x) = \frac{k^2}{1+kx}$ likformigt på $[0, 1]$? (1p)

6. Använd metoden med potensserier för att lösa differentialekvationen

$$(x-1)y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 2.$$

Ange lösningen på sluten form, det vill säga, beräkna potensseriens summa.

(Obs: Du skall visa att du behärskar just denna metod: andra sätt att lösa differentialekvationen ger ej full poäng.)

Skrivningen beräknas vara rättad onsdagen 31 maj 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.