MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
25 maj 2023

**Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.**

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x^3 - \sin y, y^3 + e^z \cos(xz), z^3 + z^2 - xy)$$

ut ur enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Undersök huruvida vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + y + z, y^2, 3z)$$

är konservativt. (2p)

(b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u}$ längst med den räta linjen som förbinder $(1, 1, 1)$ med $(2, 3, 2)$. (3p)

3. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara av klass $C^2$. Bevisa att $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u} = (2xy^2, 2x^2y, z^{10})$ längs med den cirkel i planet $2021x - 2022y + 2023z = 1$ som har mittpunkt i $(0, 1, 1)$ och radie 13. (2p)

4. (a) (**Teoriuppgift**) Är funktionen $f(z) = e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1$ analytisk i mängden $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \frac{5}{4}\}$? Är funktionen $g(z) = 1/(z^3 - z^2 - 16z + 16)$ analytisk i samma mängd? Motivera dina svar! (1p).

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 16z + 16} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \frac{5}{4}\}$ är orienterad medurs. (2p)

(c) (**Teoriuppgift**) Ange samtliga satser du har använt för att lösa (b). (1p)

**Lösningsförslag:**

*(a) Vi vet från kursen att $e^z$ samt varje polynom i variabeln $z$ är analytiska i hela $\mathbb{C}$. Därmed är $f$ analytisk i hela komplexa talplanet, och speciellt i cirkelskivan $\{|z| < \frac{5}{4}\}$.*

*Vidare vet vi att en rationell funktion av $z$ är analytisk i varje öppen mängd som inte innehåller dess poler, det vill säga punkter där nämnarpolynomet är lika med 0. Vi har i detta fall att*

$$q(z) = z^3 - z^2 - 16z + 16$$

*uppfyller $q(1) = 0$ vilket betyder att $g$ ej är analytisk i $\{|z| < \frac{5}{4}\}$.*

*(b) Vi har $q(z) = (z - 1)(z + 4)(z - 4)$, vilket ger vid handen att $z = 1$ är en enda polen till $q$ inuti $\{|z| < \frac{5}{4}\}$. Vi kan således betrakta den analytiska funktionen*

$$g(z) = \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^2 - 16}$$

*och beräkna*

$$\int_\gamma \frac{e^z + 3z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 16z + 16} dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z - 1} dz = g(1).$$

*Slutligen fås*

$$g(1) = \frac{e+3+2+1+1}{1-16} = -\frac{e+7}{15}.$$

*(c) I (a) använde vi att att summan av analytiska funktioner är analytisk, samt att en kvot med analytiska funktioner är analytisk där nämnaren är skild ifrån* $0$.

*I (b) använde vi faktorsatsen för komplexa polynom, samt Cauchys integralformel.*

5. Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$.

   (a) (**Teoriuppgift**) Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion $f$. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion $f$. (1p)

   (b) **Teoriuppgift**) Visa att om $\{f_k\}$ konvergerar likformigt mot $f$, så är $f$ en kontinuerlig funktion på $[0,1]$. (3p)

   (c) (**Teoriuppgift**) Konvergerar den specifika följden $f_k(x) = \frac{k^2}{1+kx}$ likformigt på $[0,1]$? (1p)

   **Lösningsförslag:**

   *(a) Se kompletteringskompendiet till kursen, sidan 12, för definitioner.*

   *(b) Se Sats 6.2 i kompletteringskompendiet för ett bevis.*

   *(c) Observera att $f_k(x)$ för fixt $k$ är definierad för varje $x \in [0,1]$. Vi har dock $\lim_k f(x) = \infty$ för varje fixt $x$, vilket betyder att $f_k$ inte konvergerar punktvis till en reellvärd funktion. Därmed konvergerar inte heller följden likformigt.*

6. Använd metoden med potensserier för att lösa differentialekvationen

$$(x-1)y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 2.$$

   Ange lösningen på sluten form, det vill säga, beräkna potensseriens summa.

   (*Obs: Du skall visa att du behärskar just denna metod: andra sätt att lösa differentialekvationen ger ej full poäng.*)

Skrivningen beräknas vara rättad onsdagen 31 maj 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.