

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + y, y + z, z^2)$$

ut ur enhetskuben $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

2. (a) Finns det någon potential $U(x, y, z)$ i \mathbb{R}^3 till vektorfältet

$$\mathbf{u} = (1 + y^2z, z + 2xyz, y + xy^2)$$

som uppfyller $U(0, 1, 1) = 8$? Ange i sådana fall denna potential. (4p)

(b) Beräkna kurvintegralen av \mathbf{u} längs den positivt orienterade enhetscirkeln i yz -planet i \mathbb{R}^3 . (1p)

3. (a) Beräkna flödesintegralen av

$$\mathbf{u} = (x^2, xy, z)$$

ut ur enhetssfären i \mathbb{R}^3 . (3p)

(b) (**Teoriuppgift**) Definiera rotationen av ett vektorfält i \mathbb{R}^3 . (1p)

(c) Bestäm $\text{rot } \mathbf{u}$ för vektorfältet \mathbf{u} i (a). (1p)

4. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera Cauchys sats och Cauchys integralformel. (1p)

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \left(z + \frac{z^3 + z}{z^5 + 2z^3 + z} \right) dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{i}{2}| = 1\}$ orienterad moturs. (4p)

5. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera och bevisa Gauss sats. (3p)

(b) Kan Gauss sats användas för att beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4}, z \right)$ ut ur sfären med radie 4 och centrum i $(1, 1, 1)$? (2p)

6. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda funktioner på intervallet $[0, 1]$. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f . Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f . (2p)

(b) (**Teoriuppgift**) Låt nu $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda funktioner på intervallet $[0, 1]$. Om följderna $\{g_k\}$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$ mot en kontinuerlig funktion g , måste då varje g_k vara kontinuerlig? Ge bevis eller motexempel. (3p)

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 23 augusti 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.