MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
14 augusti 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + y, y + z, z^2)$$

ut ur enhetskuben $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$. **Lösningsförslag:** *Vi observerar att enhetskuben begränsas av sex släta ytor, vilket innebär att kubens rand är styckvis slät. Då det givna vektorfältet* $\mathbf{u}$ *är ett polyomiellt fält vilket betyder att varje komponent är godtyckligt många gånger deriverbar.*

Vi kan alltså tillämpa Gauss sats. Vi har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z.$$

Den sökta flödesintegralens värde är alltså

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{K} \mathrm{div}\mathbf{u}\, dxdydz$$

där $K = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. *Vi har*

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} \mathrm{div}\mathbf{u}\, dxdydz = 2\mathrm{vol}(K) + \int_{z=0}^{1} 2zdz = 3.$$

2. (a) Finns det någon potential $U(x, y, z)$ i $\mathbb{R}^3$ till vektorfältet

$$\mathbf{u} = (1 + y^2 z, z + 2xyz, y + xy^2)$$

som uppfyller $U(0, 1, 1) = 8$? Ange i sådana fall denna potential. (4p)

(b) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u}$ längs den positivt orienterade enhetscirkeln i yz-planet i $\mathbb{R}^3$. (1p)

Lösningsförslag:

(a) Vi söker alltså en funktion $U(x, y, z)$ *sådan att*

$$\partial_x U = 1 + y^2 z.$$

Integration av detta samband ger

$$U(x, y, z) = x + xy^2 z + V(y, z)$$

där V *är funktion som endast beror av* y *och* z. *Derivering ger*

$$\partial_y U = 2xyz + \partial_y V$$

vilket efter jämförelse med $\mathbf{u}$ *ger kravet*

$$\partial_y V = z,$$

så att $V(y,z) = yz + W(z)$ där W endast beror av z. Alltså har vi $U(x,y,z) = x + yz + xy^2z + W(z)$. Vi får slutligen $\partial_z U = y + xy^2 + \partial_z W$, och genom att jämföra med $\mathbf{u}$ inser vi att $W(z) = C$ ger oss potentialer på formen

$$U(x,y,z) = x + yz + xy^2z + C.$$

Vi eftersöker ett val av konstant C såatt $U(0,1,1) = 8$: detta ger $1 + C = 8$, det vill säga $C = 7$. Den sökta potentialen är alltså $U(x,y,z) = x + yz + xy^2z + 7$.

(b) Enligt en känd sats är kurvintegralen av ett konservativt fält längs en enkel sluten kurva lika med 0. Då vi i (a) bestämde en potential till $\mathbf{u}$ kan vi alltsådra slutsatsen att den sökta kurvintegralens värde är lika med 0.

3. (a) Beräkna flödesintegralen av

$$\mathbf{u} = (x^2, xy, z)$$

ut ur enhetssfären i $\mathbb{R}^3$. (3p)

(b) (**Teoriuppgift**) Definiera rotationen av ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (1p)

(c) Bestäm rot$\mathbf{u}$ för vektorfältet $\mathbf{u}$ i (a). (1p)

Lösningsförslag:

(a) Vi kan återigen tillämpa Gauss sats eftersom sfären är en slät yta och det givna vektorfältet är polynomiellt. Vi har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 2x + x + 1 = 3x + 1.$$

På grund av symmetri har vi $\iiint_B 3x dxdydz = 0$ medan $\iiint_B 1 dxdydz = \mathrm{vol}(B) = \frac{4\pi}{3}$. Alltså fås $\iint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{3}$.

(b) Se kursboken för definitionen av rotation av ett vektorfält.

(c) Vi har

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & xy & z \end{vmatrix} = e_x(\partial_y z - \partial_z xy) + e_y(\partial_z x^2 - \partial_x z) + e_z(\partial_x xy - \partial_y x^2) = (0,0,y).$$

4. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera Cauchys sats och Cauchys integralformel. (1p)

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \left(z + \frac{z^3 + z}{z^5 + 2z^3 + z} \right) dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z + \frac{i}{2}| = 1\}$ orienterad moturs. (4p)

Lösningsförslag:

(a) Se kompendiet för en formulering av och ett bevis för Cauchys sats och Cauchys integralformel.

(b) Vi observerar först att linjäritet och Cauchys sats ger att

$$\int_\gamma \left(z + \frac{z^3 + z}{z^5 + 2z^3 + z} \right) dz = \int_\gamma z dz + \int_\gamma \frac{z^3 + z}{z^5 + 2z^3 + z} dz = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{z^4 + 2z^2 + 1} dz,$$

där vi i sista steget har förkortat med z.

Vi observerar att $z^4 + 2z^2 + 1 = (z-i)^2(z+i)^2$. Endast $z = i$ ligger innanför γ. Vi har vidare $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$. Alltså fås

$$\int_\gamma \frac{z^2 + 1}{z^4 + 2z^2 + 1} dz = \int_\gamma \frac{(z-i)(z+i)}{(z-i)^2(z+i)^2} dz = \int_\gamma \frac{1}{(z-i)(z+i)} dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

5. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera och bevisa Gauss sats. (3p)

   (b) Kan Gauss sats användas för att beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}, \frac{1}{x^4+y^4+z^4}, z\right)$ ut ur sfären med radie 4 och centrum i $(1, 1, 1)$? (2p)

   Lösningförslag: *(a) Se kursboken för en formulering av och ett bevis för Gauss sats.*

   (b) Vi observerar att det givna vektorfältet $\mathbf{u}$ *är odefinierat där* $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ *eller* $x^4 + y^4 + z^4 = 0$. *Detta inträffar endast i origo. Men* $(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 3 < 4$ *vilket betyder att origo ligger innanför den givna sfären vars centrum är i* $(1, 1, 1)$ *och vars radie är* 4. *Således är förutsättningarna för Gauss sats inte uppfyllda.*

6. (a) (**Teoriuppgift**) Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda funktioner på intervallet $[0, 1]$. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f. (2p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Låt nu $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda funktioner på intervallet $[0, 1]$. Om följden $\{g_k\}$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$ mot en kontinuerlig funktion g, måste då varje g_k vara kontinuerlig? Ge bevis eller motexempel. (3p)

   Lösningsförslag:

   (a) Se kompletteringskompendiet för dessa definitioner.

   (b) Svaret på frågan är nej: till exempel kan vi betrakta funktionerna g_k *som uppfyller* $g_k(x) = \frac{1}{k}$ *för* $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *och* $g_k(x) = 0$ *för irrationella tal i* $[0, 1]$. *Då konvergerar* g_k *likformigt mot* 0 *men varje* g_k *är diskontinuerlig.*

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 23 augusti 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.