MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
23 februari 2024

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Vilket eller vilka av vektorfälten

$$(i)\,\mathbf{u}(x,y,z) = (yz, xz, xy) \quad (ii)\,\mathbf{u}(x,y,z) = \left(1 + \log(z^2+1), 0, \frac{x}{z^2+1}\right)$$
$$(iii)\,\mathbf{u}(x,y,z) = (2xy + \sin z, x^2, 2x \sin z)$$

har en potential i ellipsoiden

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 1\}?$$

(Eventuell potential behöver ej anges.)

2. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (xz, 2yz, xy + z^2)$$

ut ur cylindern $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4, -1 \leq z \leq 1\}$.

3. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera Cauchy-Riemanns ekvationer med samtliga förutsättningar. (1p)

(b) (**Teoriuppgift**) Ge ett exempel på två funktioner $u(x,y)$ och $v(x,y)$ som är kontinuerligt deriverbara, men som inte uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. (1p)

(c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{|z|^2}{3\bar{z} + |z|^2} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 2\}$ är orienterad moturs. (3p)

(Ledning: Vissa identiter för komplexa tal kan vara användbara.)

4. (a) Bestäm rotationen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (\sin(\pi z), \sin(\pi z), \pi(x + y - z)\cos(\pi z) - \sin(\pi z)). \qquad (2p)$$

(b) Beräkna kurvintegralen av vektorfältet i (a) längs kurvan $\{(2t, 2t + \sin(\pi t), 1 + t^2) \colon 1 \leq t \leq 2\}$. (3p)

5. (a) **(Teoriuppgift)** Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma y^2 dx + x dy$$

där γ är den positivt orienterade ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$. (2p)

Var god vänd!

6. (a) (**Teoriuppgift**) Betrakta en följd $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ av kontinuerliga funktioner $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$. Definiera vad som menas med att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$. (2p)

   (b) (**Teoriuppgift**) Konvergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}$$

   punktvis på $[0,1]$? Konvergerar serien likformigt på $[0,1]$? (3p)

Skrivningen beräknas vara rättad 1 mars 2024. Se kurshemsidan för information om återlämning.