

Lösningsförslag till MM5011, 2024-08-18

1. Beräkna $\int_{\Gamma} x dx + y dy + z dz$ där Γ är kurvan $(t \cos t, t \sin t, t)$ från $(\pi, 0, -\pi)$ till $(0, 0, 0)$.
(5p)

Kurvan har tangenten $(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$. Insättningen av parametriseringen och tangenten och förenklingar ger

$$\int_{\Gamma} x dx + y dy + z dz = \int_{-\pi}^0 2t dt = -\pi^2.$$

2. För vilka reella p konvergerar integralen $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$? (5p)

Varaibelbyte med rymdpolärkoordinater ger

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} = \{t = r^2\} = \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{-p} dt \end{aligned}$$

Men

$$\int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} = \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{-p} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^p} = \begin{cases} \left[\frac{(1-t)^{1-p}}{1-p} \right]_0^1, & p \neq 1 \\ -[\ln(1-t)]_0^1, & \text{annars} \end{cases}$$

Således konvergerar integralen då $p < 1$.

3. Beräkna ytingegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ där Y är klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (xz^2, x^2, x^2y^8)$. (5p)

Låt V beteckna mängden $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Då är

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_V z^2 dx dy dz = \frac{4\pi}{15}.$$

4. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet av *bågvis sammanhängande mängd* D i $\mathbb{C}$. (1p)
Se kompendiet för analytiska funktioner.

- (b) (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet av *enkelt sammanhängande mängd* D i $\mathbb{C}$. (1p)
Se kompendiet för analytiska funktioner.

- (c) Är mängden $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ enkelt sammanhängande? (1p)
Nej.

- (d) Låt γ vara enhetscirkeln och $p \in \mathbb{C}$ men inte på γ . Bestäm $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-p}$. (2p)

Integralen är 0 om $|p| > 1$ och $2\pi i$ om $|p| < 1$, enligt satsen.

5. Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vara en potensserie med positiv konvergensradie ρ . Sätt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ för $|z| < \rho$. Låt $p(z)$ och $q(z)$ vara polynom som inte har reella nollställen och $z \in \mathbb{C}$ och $x \in \mathbb{R}$.

- (a) **(Teoriuppgift)** Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$ har konvergensradie ρ . (2p)

Se kompendiet.

- (b) **(Teoriuppgift)** Vad är konvergensradie för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} a_n z^n$? (1p)

Konvergensradien är ρ eftersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{p(n+1)}{q(n+1)} a_{n+1}}{\frac{p(n)}{q(n)} a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{p(n+1)}{q(n+1)}}{\frac{p(n)}{q(n)}} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

där

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{p(n+1)}{q(n+1)}}{\frac{p(n)}{q(n)}} \right| = 1$$

(Tänk och räkna pådet!)

- (c) Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ uppfyller differentialekvationen

$$y''(x) = y(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Termvis derivering visar att potensserien uppfyller differentialekvationen. Termvis derivering är möjlig på grund av att serien har konvergensradie $\rho = \infty$. (2p)

6. (a) **(Teoriuppgift)** Definiera begreppet analytisk funktion. (2p)

Se kompendiet.

- (b) **(Teoriuppgift)** Låt $f : D \subset \mathbb{C}$ vara sådan att $f = F'$ för någon analytisk funktion $F : D \subset \mathbb{C}$. Låt Γ vara en styckvis C^1 kurva i D från punkten a till punkten b . Visa att

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(b) - F(a)$$

och $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ om $a = b$. Är denna utsaga samma som Cauchys sats? (1p)

Se kompendiet för beviset. Det är inte samma som Cauchys sats.

- (c) **(Teoriuppgift)** Resonera om det kan finnas en analytisk funktion g definierad på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sådana att $g'(z) = 1/z$. (2p)

Svaret är nej. Annars skulle vi få enligt (b) $\int_{\Gamma} (1/z) dz = 0$ där Γ är enhetscirkeln.

Men $\int_{\Gamma} (1/z) dz = 2\pi i$ med hjälp av parametrisering. Så det kan inte finnas g som är analytisk