MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: B.Shapiro

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
13 januari 2025

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera noga. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng varav minst 3 från teoridelen räcker för godkänt.

Problem 1.
1) Hitta potentialer och beräkna, med hjälp av dem, följande integraler:

$$a) \quad \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy;$$

$$b) \quad \int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yzdx + zxdy + xydz.$$

3 p

2) Avgör om följande påstående är sanna eller ej. Motivera ditt svar med ett skiss på bevis eller motexempel.

a) Om fältet har en potential så är kurvintegralen över alla slutna kurvor lika med noll.

b) Om kurvintegralen över alla slutna kurvor som ligger i område är lika med noll, så har fältet har en potential i detta område.

2 p

Problem 2.
1) Beräkna kurvintegralen direkt och med hjälp av Greens formel

$$\int_\Gamma 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$

där Γ är randen av triangeln med hörn i $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ och $C = (1, 3)$ passerat moturs.

4 p

2) Formulera Greens sats.

1 p

Problem 3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y F \cdot NdS$ där Y är konen $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $0 \le z \le 1$, N är den yttre normalen till Y och

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2).$$

5 p

Problem 4.
1) Med hjälp av Stokes' sats beräkna kurvintegralen $\int_C F dr$ där $F = (y - z, z - x, x - y)$ och C är ellipsen som fås som snittet mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$

och planet $x + z = 1$ passerat moturs (om man tänker på dess projektion på xy-planet).

4 p

2) Formulera Stokes' sats.

1 p

Problem 5. Funktionen $\tan z = \frac{sinz}{cosz}$ är analytisk för z med $|z| < \frac{\pi}{2}$. Låt γ vara den positivt orienterade cirkeln $|z| = 1$. Beräkna

$$a) \quad \int_\gamma \tan z dz;$$

$$b) \quad \int_\gamma \frac{\tan z}{z - \frac{\pi}{4}} dz.$$

5 p

Problem 6.
1) Bestäm konvergensradien R för potenserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{9^n \ n^9}.$$

Har vi likformig konvergens på cirkelskivan $|z| \leq R$?

4 p

2) Definiera konvergensradie för en potensserie.

1 p

Lycka till!