Lösningar till tentamen Matematik II, Analys B, 13 januari 2025

1. Hitta potentialer och beräkna, med hjälp av dem, följande integraler:

$$a) \quad \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy;$$

$$b) \quad \int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yzdx + zxdy + xydz.$$

Lösning. a) För att hitta potentialen U till fältet $(x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$ måste man lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} U'_x = x^4 + 4xy^3 \\ U'_y = 6x^2y^2 - 5y^4. \end{cases}$$

Integration av första ekvationen ger $U = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + \Phi(y)$. Insätning av detta utryck i den andra ekvationen ger

$$U'_y = 6x^2y^2 + \Phi' = 6x^2y^2 - 5y^4 \leftrightarrow \Phi' = -5y^4 \leftrightarrow \Phi = -y^5 + konst.$$

Sammanlagt kan $U = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5$ användas som fältets potential. Analysens huvudsats ger oss

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} Fdr = U(3,0) - U(-2,-1) = \frac{3^5}{5} - \left(\frac{(-2)^5}{5} + 2(-2)^2(-1)^3 - (-1)^5\right) = \frac{3^5}{5} - \left(-\frac{32}{5} - 8 + 1\right) = 62.$$

b) På ett liknande sätt behöver vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} U'_x = yz \\ U'_y = xz \\ U'_z = xy. \end{cases}$$

Integrering av första ekvationen get $U = xyz + \Phi(y, z)$. Kan man direkt notera att $U = xyz$ uppfyller alla tre ekvationer i systemet och är följaktligen potential av fältet $F = (yz, zx, xy)$. På grund av det gäller

$$\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} Fdr = U(a,b,c) - U(1,1,1) = abc - 1.$$

2) Avgör om följande påstående är sanna eller ej. Motivera ditt svar med ett skiss på bevis eller motexempel.

a) Om fältet har en potential så är kurvintegralen över alla slutna kurvor lika med noll.

b) Om kurvintegralen över alla slutna kurvor som ligger i område är lika med noll, så har fältet har en potential i detta område.

Svar. Både påståenden är sanna, se avsnitt 9.4 i boken.

2. Beräkna kurvintegralen direkt och med hjälp av Greens formel

$$\int_\Gamma 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$$

där Γ är randen av triangeln med hörn i $A=(1,1)$, $B=(2,2)$ och $C=(1,3)$ passerat moturs.

Lösning. I vårt fall gäller att vektorfältet ges av $F=(P,Q)=(2(x^2+y^2),(x+y)^2)$. Med hjälp av Gauss formel får man

$$\int_\Gamma F dr = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_\Delta (2(x+y)-4y)dxdy = 2\iint_\Delta (x-y)dxdy.$$

Här Δ är triangeln med hörn i $A=(1,1)$, $B=(2,2)$ och $C=(1,3)$. Triangeln Δ kan parametriseras som $\{1\le x\le 2, x\le y\le 4-x\}$. Upprepad integration sedan ger

$$2\iint_\Delta (x-y)dxdy = 2\int_1^2 dx\left(\int_x^{4-x}(x-y)dy\right) = 2\int_1^2 dx\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)|_x^{4-x}$$

$$=2\int_1^2\left(x(4-x)-x^2-\left(\frac{(4-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\right)dx = \cdots = 2\int_1^2(-2x^2+8x-8)dx$$

$$=-4\int_1^2(x^2-4x+4)dx = -4\frac{(x-2)^3}{3}|_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Om vi vill beräkna integralen direkt ska vi splittra kurva Γ i tre bitar $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ där Γ_1 är en rak sträcka mellan $A=(1,1)$ och $B=(2,2)$; Γ_2 är en rak sträcka mellan $B=(2,2)$ och $C=(1,3)$ och slutligen är Γ_3 en rak sträcka mellan $C=(1,3)$ och $A=(1,1)$. Γ_1 parametriseras som $\{y=x=t, 1\le t\le 2\}$; Γ_2 parametriseras som $\{x=2-t, y=2+t, 0\le t\le 1\}$; Γ_3 parametriseras som $\{x=1, y=3-2t, 0\le t\le 1\}$. Med hjälp av dessa parametriseringar får man

$$I_1=\int_{\Gamma_1} F dr = \int_1^2(2(t^2+t^2)+(2t)^2)dt = 8\int_1^2 t^2 dt = 8\frac{t^3}{3}|_1^2 = \frac{8}{3}(8-1)=\frac{56}{3}.$$

$$I_2=\int_{\Gamma_2} F dr = \int_0^1(-2((2-t)^2+(2+t)^2)+4^2)dt = -2\int_0^1(8+2t^2)dt+16 = -4\int_0^1 t^2 dt = -\frac{4}{3}.$$

$$I_3=\int_{\Gamma_3} F dr = \int_0^1(1+(3-2t))^2(-2)dt = \int_0^1(4-2t^2)(-2)dt = \frac{(4-2t)^3}{3}|_0^1 = \frac{8}{3}-\frac{64}{3} = -\frac{56}{3}.$$

Alltså är

$$\int_\Gamma F dr = \frac{56}{3}-\frac{4}{3}-\frac{56}{3} = -\frac{4}{3}$$

2) Formulera Greens sats.

Svar. Se avsnitt 9.2 i boken.

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y F \cdot N dS$ där Y är konen $x^2+y^2-z^2=0;\ 0 \le z \le 1$, N är den yttre normalen till Y och

$$F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2).$$

Lösning. Om vi kompletterar Y med övre locket $L := \{x^2+y^2 \le 1,\ z = 1\}$ och normalen $(0,0,1)$ vi kan tillämpa Gauss sats för att beräkna ytintegralen över unionen $Y \cup L$ som

$$\iint_{Y\cup L} F \cdot N dS = \iiint_K div(F) dxdydz$$

där K är struten $\{0 \le z \le 1,\ z^2 \ge x^2+y^2\}$. Divergensen $div(F)$ är lika med $2(x+y+z)$. För att beräkna trippelintegralen låt oss introducera polära koordinater (r,ϕ) in xy-planet och behålla z som tredje koordinaten. I koordinatsystemet (r,ϕ,z) ges struten K av olikheterna $\{0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le r \le z,\ 0 \le z \le 1\}$.

Man får

$$\iiint_K div(F) dxdydz = 2\iiint_K (x+y+z) dxdydz =$$

$$2\int_0^1 dz \left(\iint_{0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le r\le z} (r\cos\phi + r\sin\phi + z) r dr d\phi \right) = 4\pi \int_0^1 dz \left(\int_0^z z r dr \right).$$

Sista likheten gäller eftersom för varje fixt r man har $\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0$. Vidare fås

$$4\pi \int_0^1 dz \left(\int_0^z z r dr \right) = 4\pi \int_0^1 z dz \frac{r^2}{2}\Big|_0^z = 2\pi \int_0^1 z^3 dz = \pi \frac{z^4}{2}\Big|_0^1 = \pi/2.$$

För att lösa det ursprungliga problemet behöver vi substrahera från $\pi/2$ ytintegralen över L som vi lagt till. Man har

$$\iint_L F \cdot N dS = \iint_L (x^2, y^2, z^2) \cdot (0,0,1) dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} z^2 dS = Area(x^2+y^2 \le 1) = \pi.$$

Notera att $z = 1$ i den sista uträkningen. Sammanlagt får man $\pi/2 - \pi = -\pi/2$.

4. Med hjälp av Stokes' sats beräkna kurvintegralen $\int_C F dr$ där $F = (y-z, z-x, x-y)$ och C är ellipsen som fås som snittet mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $x+z=1$ passerat moturs (om man tänker på dess projektion på xy-planet).

Lösning. Vi tolkar C som den positivt orientera randen till den elliptiska skivan E som ligger i planet $x+z=1 \leftrightarrow z = 1-x$. Enligt Stokes sats

$$\int_C F dr = \iint_E rot(F) \cdot N dS$$

där N är normalen till E med den positiva z-koordinaten och

$$rot(F) = \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{pmatrix} = (-2,-2,-2).$$

Enhetsnormalen N till E med den positiva z-koordinaten ges av $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. Areaelementen dS i planet $x+z=1$ ges av -$\sqrt{2}dxdy$. Totallt får man

$$\iint_E rot(F)\cdot NdS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 4dxdy = 4Area(x^2+y^2\leq 1) = 4\pi.$$

2) Formulera Stokes' sats.

Svar. Se avsnitt 10.3 i boken.

5. Funktionen $\tan z = \frac{sinz}{cosz}$ är analytisk för z med $|z| < \frac{\pi}{2}$. Låt γ vara den positivt orienterade cirkeln $|z| = 1$. Beräkna

$$a) \quad \int_\gamma \tan z dz;$$

$$b) \quad \int_\gamma \frac{\tan z}{z-\frac{\pi}{4}} dz.$$

Lösning. a) Enligt Cauchys sats är $\int_\gamma \tan z dz = 0$ eftersom $\tan z$ är analytisk.

b) Punkten $z = \frac{\pi}{4}$ ligger inom cirkeln $|z| = 1$. Enligt Cauchys integralformel är

$$\int_\gamma \frac{\tan z}{z-\frac{\pi}{4}} dz = 2\pi i \tan\frac{\pi}{4} = 2\pi i \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 2\pi i.$$

6. Bestäm konvergensradien R för potenserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{9^n\ n^9}$$

Har vi likformig konvergens på cirkelskivan $|z| \leq R$?

Lösning. Om vi sätter $w = z^2$ så får vi serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{9^n n^9}$. Konvergensradien för serien i w fås genom att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{9^{n+1}(n+1)^9}}{\frac{1}{9^n n^9}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{n}{n+1}\right)^9 = \frac{1}{9}.$$

Alltså har vi konvergens om $|z|^2 = |w| < 9$ och divergens om $|z|^2 = |w| > 9$. Det ger att $R = 3$. I området $|z| \leq 3$ så är

$$\left|\frac{z^{2n}}{9^n n^9}\right| \leq \frac{1}{n^9}.$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$ är konvergent, så enligt Weierstrass majorantsats har vi likformig konvergens för $|z| \le 3$.

2) Definiera konvergensradie för en potensserie.

Svar. Se Definition 8.2 i kompendiet.