MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: B.Shapiro och Alice Brolin

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
21 februari 2025

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera noga. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng varav minst 3 från teorifrågorna räcker för godkänt.

Problem 1. Hitta potentialer och beräkna, med hjälp av dem, följande integraler:

$$a) \quad \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy;$$

$$b) \quad \int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} xdx + ydy - zdz.$$

3 p

2) Avgör om följande påstående är sanna eller ej. Motivera ditt svar med ett skiss på bevis eller motexempel.

a) Om vektorfältet $F = (P, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett område Ω så har F en potential i Ω.

b) Om ett område $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ är enkelt sammanhängande så gäller det att varje sluten enkel (utan självsnitt) kurva $\gamma \subset \Omega$ är randen till något delområde som helt och hållet ligger i Ω.

2 p

Problem 2. Beräkna kurvintegralen direkt och med hjälp av Greens formel

$$\int_\Gamma -x^2ydx + xy^2dy$$

där Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ passerat moturs.

4 p

2) Formulera Gauss sats.

1 p

Problem 3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y F \cdot N dS$ där Y är sfären $x^2+y^2+z^2 = R^2$, N är normalen till Y som pekar bort från origo och

$$F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3).$$

(Tips. Rymdpolära koordinater ges av $x = r \sin\theta\cos\phi; y = r\sin\theta\sin\phi; z = r\cos\theta$ och $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.)

Problem 4. Med hjälp av Stokes' sats beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma F \cdot dr$$

där $F = (x^2y^3, 1, z)$ och Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0$ passerad motus.
4 p

2) Formulera Stokes' sats.

1 p

Problem 5. Beräkna för alla positiva heltal n

$$\int_{\gamma_n} \frac{1+z}{z^4 + \pi^2 z^2} dz$$

där γ_n är den positivt orienterade cirkeln $|z| = n$.

5 p

Problem 6. Ange konvergensradien och beräkna summan för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{(n+1)!} z^n$$

4 p

2) Definiera likformig konvergens för en funktonsssserie.

1 p

Lycka till!