Lösningar till tentamen Matematik II, Analys B, 21 februari 2025

Problem 1. Hitta potentialer och beräkna, med hjälp av dem, följande integraler:

$$a) \quad \int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy;$$

$$b) \quad \int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} xdx + ydy - zdz.$$

3 p

Lösning. a) För att hitta potentialen U till fältet $(3x^2 - 2xy + y^2, -(x^2 - 2xy + 3y^2))$ måste man lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} U'_x = 3x^2 - 2xy + y^2 \\ U'_y = -(x^2 - 2xy + 3y^2). \end{cases}$$

Integration av första ekvationen ger $U = x^3 - x^2y + y^2x + \Phi(y)$. Insätning av detta utryck i den andra ekvationen ger

$$U'_y = -x^2 + 2xy + \Phi' = -x^2 + 2xy - 3y^2 \leftrightarrow \Phi' = -3y^2 \leftrightarrow \Phi = -y^3 + konst.$$

Sammanlagt kan $U = x^3 - x^2y + y^2x - y^3$ användas som fältets potential. Analysens huvudsats ger oss

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} Fdr = U(3,0) - U(-2,-1) = 27 - ((-2)^3 - (-2)^2(-1) + (-2)(-1)^2 - (-1)^3) = 27 - (-5) = 32.$$

b) På ett liknande sätt behöver vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} U'_x = x \\ U'_y = y \\ U'_z = -z. \end{cases}$$

Kan man lätt gissa att $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2)$ uppfyller alla tre ekvationer i systemet och är följaktligen potential av fältet $F = (x, y, -z)$. På grund av det gäller

$$\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} Fdr = U(a,b,c) - U(1,1,1) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - 1).$$

2) Avgör om följande påstående är sanna eller ej. Motivera ditt svar med ett skiss på bevis eller motexempel.

a) Om vektorfältet $F = (P, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett område Ω så har F en potential i Ω.

b) Om ett område $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ är enkelt sammanhängande så gäller det att varje sluten enkel (utan självsnitt) kurva $\gamma \subset \Omega$ är randen till något delområde som helt och hållet ligger i Ω.

2 p

Svar. Påståendet a) är felaktigt och b) är sant, se avsnitt 9.4 i boken.

Problem 2. Beräkna kurvintegralen direkt och med hjälp av Greens formel

$$\int_\Gamma -x^2ydx + xy^2dy$$

där Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ passerat moturs.

4 p

Lösning. I vårt fall gäller att vektorfältet ges av $F = (P, Q) = (-x^2y, xy^2)$. Med hjälp av Greens formel får man

$$\int_\Gamma Fdr = \iint_{x^2+y^2\le R^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\le R^2} (x^2 + y^2)dxdy$$

$$\iint_{0\le r\le R,\, 0\le\theta\le 2\pi} r^2 \cdot rdrd\theta = 2\pi \int_0^R r^3dr = \frac{2\pi r^4}{4}|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Om vi vill beräkna integralen direkt ska vi parametrisera cirkeln som $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$. Man får

$$\int_\Gamma -x^2ydx+xy^2dy = \int_0^{2\pi} (-R^2\cos^2\phi\cdot R\sin\phi\cdot R(-\sin\phi)+R\cos\phi\cdot R^2\sin^2\phi\cdot R\cos\phi)d\phi$$

$$= R^4 \int_0^{2\pi} 2\cos^2\phi\sin^2\phi d\phi = \frac{R^4}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\phi)d\phi = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\phi)d\phi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

2) Formulera Gauss sats.

1 p

Svar. Se avsnitt 10.2 i boken.

Problem 3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y F\cdot NdS$ där Y är sfären $x^2+y^2+z^2 = R^2$, N är normalen till Y som pekar bort från origo och

$$F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3).$$

(Tips. Rymdpolära koordinater ges av $x = r\sin\theta\cos\phi; y = r\sin\theta\sin\phi; z = r\cos\theta$ och $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$.)

Lösning. Med hjälp av Gauss' sats fås

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} F\cdot NdS = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} div(F)dxdydz = 3\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= 3\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi = 6\pi\int_0^R r^4dr\cdot\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 12\pi\frac{R^5}{5}.$$

Problem 4. Med hjälp av Stokes' sats beräkna kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr$$

där $F = (x^2y^3, 1, z)$ och Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0$ passerad motus.

4 p

Lösning. Med hjälp av Stokes' sats fås

$$\int_{x^2+y^2=R^2} F \cdot dr = \iint_{x^2+y^2\leq R^2} rot(F) \cdot N dS.$$

Här använder vi cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$ som ytan vars rand är Γ. Vidare

$$rot(F) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y^3 & 1 & z \end{pmatrix} = (0, 0, -3x^2y^2)$$

och normalen ges av $N = (0, 0, 1)$. Sammanlagt gäller

$$\int_{x^2+y^2=R^2} F{\cdot}dr = \iint_{x^2+y^2\leq R} -3x^2y^2dxdy = -3\iint_{0\leq r\leq R,\,0\leq\phi\leq 2\pi} r^4 \sin^2\phi\cos^2\phi r dr d\phi$$

$$= -3\int_0^R r^5 dr{\cdot}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\cos^2\phi d\phi = -\frac{R^6}{2}{\cdot}\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\phi)d\phi = -\frac{R^6}{2}{\cdot}\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos(4\phi))d\phi = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

2) Formulera Stokes' sats.

1 p

Svar. Se avsnitt 10.3 i boken.

Problem 5. Beräkna för alla positiva heltal n

$$\int_{\gamma_n} \frac{1+z}{z^4+\pi^2z^2} dz$$

där γ_n är den positivt orienterade cirkeln $|z| = n$.

5 p

Lösning. a) $z^4 + \pi^2 z^2 = z^2(z - \pi i)(z + \pi i)$ så den är noll vid $z = 0$ och $z = \pm i\pi$. För $n = 1, 2, 3$ är bara 0 inom γ_n.

$$\frac{1+z}{z^2+\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}\frac{1+z}{1+\frac{z^2}{\pi^2}}$$

har för $|z| < \pi$ potensserie

$$\frac{1}{\pi^2}(1+z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{z}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^{2n}}{\pi^{2(n+1)}} + \frac{z^{2n+1}}{\pi^{2(n+1)}}\right)$$

så för $n = 1, 2, 3$

$$\int_{\gamma_n} \frac{1+z}{z^4+\pi^2 z^2} dz = \int_{\gamma_n} \left(\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^{2n-2}}{\pi^{2(n+1)}} + \frac{z^{2n-1}}{\pi^{2(n+1)}} \right) \right) dz = \frac{2}{\pi} i,$$

eftersom potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^{2n-1}}{\pi^{2(n+1)}} + \frac{z^{2n-1}}{\pi^{2(n+1)}} \right)$ är analytisk.

För $n > 3$ så har vi att $\pm\pi i$ också är inom cirklen γ_n. Om σ_+, σ_- är små cirklar (t.ex. radie 1) runt πi respektive $-\pi i$ så är enligt Cauchys integralformel

$$\int_{\sigma_+} \frac{1+z}{z^4+\pi^2 z^2} dz = 2\pi i \frac{1+\pi i}{-\pi^2(2\pi i)} = \frac{-1-\pi i}{\pi^2}$$

$$\int_{\sigma_-} \frac{1+z}{z^4+\pi^2 z^2} dz = 2\pi i \frac{1-\pi i}{-\pi^2(-2\pi i)} = \frac{1-\pi i}{\pi^2}$$

Alltså för $n > 3$ har vi

$$\int_{\gamma_n} \frac{1+z}{z^4+\pi^2 z^2} dz = \frac{2}{\pi} i + \frac{-1-\pi i}{\pi^2} + \frac{1-\pi i}{\pi^2} = 0$$

Problem 6. Ange konvergensradien och beräkna summan för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n 2^n}{(n+1)!} z^n$$

4 p

Lösning. Med $a_n = \frac{n2^n}{(n+1)!}$ så har vi

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2(n+1)}{n(n+2)} \to 0, \text{ då } n \to \infty$$

Det ger att konvergensradien är oändlig dvs att serien konvergerar för alla z.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{(n+1)!} z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} n z^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \frac{d}{dz} z^n$$

$$= z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} z^n = z \frac{d}{dz} \frac{1}{2z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^{n+1}}{(n+1)!} = z \frac{d}{dz} \frac{1}{2z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} - 2z - 1 \right)$$

$$= z \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{2z}}{2z} - 1 - \frac{1}{2z} \right) = (1 - \frac{1}{2z}) e^{2z} + \frac{1}{2z}$$

2) Definiera likformig konvergens för en funktonssserie.

1 p

Lösning. Se definition 7.1 i kompendiet.

Lycka till!