Lösningsförslag för tentamensskrivningen den 25 maj 2025

(1) (a) Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x+y}$ där γ är $y=2x$ från punkten $(1,2)$ till punkten $(2,4)$.

(3p)

(b) Vi säger att ett vektorfält $(P(x,y),Q(x,y))$ är ett exakt vektorfält om $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Är vektorfältet $F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ på $\Omega:=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 9\}$ exakt? Konservativt? (3p)

Lösningsförslag:
(a) Med parametriseringen $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))=(t,2t)$ får vi $\mathbf{F}(t,2t)=(1/3,2/3)$ och tangentvektorn $\mathbf{r}'(t)=(x'(t),y'(t))=(1,2)$. Då blir integranden
$\mathbf{F}(t,2t)\cdot\mathbf{r}'(t)=5/3$. Så

$$\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x+y}=\int_1^2\frac{5}{3}dt=\frac{5}{3}.$$

(b) Vektorfältet är exakt eftersom $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x+y)(y-x)}{x^2+y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Men det är inte konservativt eftersom

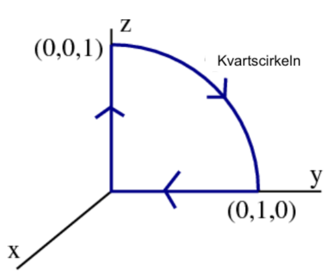
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=\pi,$$

där γ är cirkeln $x^2+y^2=4$ som kan parametriseras med $(2\cos t,2\sin t)$ och därav $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'=\frac{1}{2}$.
Kommentar: Det finns ingen definition om exakt vetorfält i boken.

(2) (a) (**Teoriuppgift**) Ange definitionen för nollmängd i planet. (2p)
(b) (**Teoriuppgift**) Visa att grafen av en kontinuerlig funktion av en variabel $y=\varphi(x)$, $a\le x\le b$ utgör en nollmängd. (4p)

Lösningsförslag: Se boken.

(3) (a) Låt γ vara en sluten kurva i bilden nedan och $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,z,x)$.
Kan integralen $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ beräknas med Stokes sats? Beräkna denna integral.



(3p)

(b) Låt $f(x,y,z)=(x+2)\ln\sqrt{\frac{y+3}{z+4}}$. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \nabla f\cdot d\mathbf{r}$ där γ är räta linjen från $(0,1,0)$ till $(1,1,2)$ och därifrån räta linjen till $(1,0,0)$.

(3p)

Lösningsförslag:

(a) Stokes sats kan användas eftersom alla villkor är uppfyllda (kolla noggrannt).
Vi beräkna rot av vektorfältet

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (y, z, x) = (-1, -1, -1)$$

och parametrisering av ytan

$$\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (0, r\cos\theta, \sin\theta), \quad \text{för } 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

vilket ger normalen

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \theta} = (r, 0, 0)$$

Det pekar i samma riktning som x-riktningen men den ska peka mot andra håll enligt bilden så normalen ska vara

$$N = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} = (-r, 0, 0)$$

Alltså

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \{\text{enligt Stokes}\} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot N dS = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-1, -1, -1) \cdot (-r, 0, 0) d\theta dr = \frac{\pi}{4}.$$

Kommentar: Normalen kan fås direkt i xyz-koordinaterna. Men ovanstående uträkningen är motiverad av frågan från ett par studenter: hur bestämmer vi normalens riktningen i fall vi parametrisera ytan direkt. Vi kan också räkna direkt med parametriseringen av kurvan.

(b) Notera att f är en potential till grad$f$ och f är väldefinierad inom området (argumentera varför!). Så $\int_\gamma \mathrm{grad} f \cdot d\mathbf{r}$ är vägoberoende och

$$\int_\gamma \mathrm{grad} f \cdot d\mathbf{r} = \left[(x+2)\ln\sqrt{\frac{y+3}{z+4}}\right]_{(1,0,0)} - \left[(x+2)\ln\sqrt{\frac{y+3}{z+4}}\right]_{(0,1,0)} = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}.$$

(4) (a) (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet likformigt konvergent funktionsserie. (2p)

(b) Konvergerar serien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ punktvis på intervallet $(-1, 1)$? Konvergerar serien likformigt på intervallet $(-1, 1)$? Ange ett intervall på vilket serien är likformigt konvergent. (4p)

Lösningsförslag:

(a) Se kompendiet.

(b) Serien konvergerar punktvis mot $\frac{1}{1-x}$ för alla $x \in (-1, 1)$. Men den är inte likformigt konvergent. För att se detta observera att $|x^n| \ge 1$ för alla n på $(-1, 1)$ och om serien konvergerar likformigt måset den går mot $1/(1-x)$. Tag nu $\varepsilon = 1$ i definitionen för likformig konvergens. Då kan vi finna ett $N > 0$ sådant att

$$\left| x^n - \frac{1}{1-x} \right| < 1 \text{ för alla } x \in (-1, 1) \text{ om } n > N.$$

Välj något $n > N$. Då

$$\left|\frac{1}{1-x}\right| \leq \left|\frac{1}{1-x} - x^n\right| + |x^n| < 1 + 1 = 2 \text{ för alla } x \in (-1, 1),$$

vilket betyder att $\frac{1}{1-x}$ är begränsad på $(-1, 1)$, vilket är falskt. Då är serien inte likformigt konvergent.

Serien är likformigt konvergent på $[-\rho, \rho]$ med $0 \leq \rho < 1$. (Försök bevisa detta).

(5) (a) (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet analytisk funktion. (2p)
(b) Visa att $f(z) = (\bar{z} + 1)^3 - 3\bar{z}$ inte är analytisk i någon punkt. (4p)

Lösningsförslag:

(a) Se kompendiet.

(b) Låt $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$. Då

$$f(z) = \bar{z}^2(\bar{z} + 3) + 1 = (\underbrace{(x^2 + y^2)(x + 3) + 1}_{u(x,y)}) + i(\underbrace{-(x^2 + y^2)y}_{v(x,y)}).$$

Observera att u och v är C^1-funktioner. Vi använder Cauchy-Riemanns ekvationer (CR) för att avgöra f är analytisk. I vårt fall blir Cauchy-Riemanns ekvationer

$$2x(x + 3) + (x^2 + y^2) = -(x^2 + y^2) - 2y^2, \ 2y(x + 3) = 2xy$$

$\Leftrightarrow$

$$2x(2x + 3) + 2x^2 + 4y^2 = 0, \ 6y = 0.$$

CR är uppfyllda bara i $x = y = 0$ eller $x = -3/2, y = 0$. Då kan f inte vara anaytisk i någon punkt.