

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera noga. Minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna (T), räcker för godkänd.

1 Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right),$$

där γ är en glatt kurva som går från $(1, 1)$ till $(3, 3)$ och ligger i området $x > 0, y > 0$. **(5p)**

2 Betrakta följande potensserier

- (a) i. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2} x^k$;
- ii. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+k}{1+k^2} x^k$;
- iii. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k x^k}{k!}$;
- iv. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1+e^{-k}} x^k$;
- v. $\sum_{k=1}^{\infty} 7^{-k} (x-3)^k$.

Bestäm konvergensradie för **varje** potensserie. **(5p)**

(b) **(T)** Definiera begreppet likformigt konvergent funktionsföljd. Förklara skillnaden mellan punktvis och likformig konvergens för följder. **(3p)**

(c) **(T)** För serierna ovan ange exempel på områden där serierna konvergerar likformigt. Kan man hitta ett område som passar alla serier? **(2p)**

3 (a) **(T)** Formulera Gauß sats. **(2p)**

(b) En student vill kolla om Gauß sats stämmer. Hen betraktar vektorfältet $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ och ytan som består av två delar: ytan Y_1 och locket Y_2 :

$$Y_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2\};$$

$$Y_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$

Visa att Gauß sats stämmer för vektorfältet $\vec{F}$ och kroppen som begränsas av ytorna Y_1 och Y_2 , *d.v.s.* beräkna alla integraler som ingår i Gauß sats och kolla att likheten stämmer. **(5p)**

4 (a) **(T)** Formulera Cauchys integralsats. **(2p)**

(b) **(T)** Beräkna integralen

$$\int_{C_R} \frac{1}{z} dz,$$

där C_R är cirkeln med radie R och centrum i origo som är tagen ett varv moturs. **(1p)**

(c) Beräkna integralen

$$\int_{C_4} \frac{z+2}{z^3 - 8z^2 + 25z - 26} dz,$$

där C_4 är cirkeln med radie 4 och centrum i origo som är tagen ett varv moturs. **(5p)**

LYCKA TILL!

När din tenta är redo för utlämningen kommer du att få ett mejl från atentaaterlamning@math.su.se. Om du inte fått mejlet så är din tenta inte redo för utlämningen.