

1 Man kan lösa problemet på två olika sätt.

Först konstaterar vi att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

vilket innebär att man får byta integrationskurva utanför singulära punkter $x = 0, y = 0$.

Förslag 1 Vi byter integrationen till den rätta linjen $(s, s), s \in [1, 3]$, som går mellan punkterna $(1, 1)$ och $(3, 3)$. På denna linje får vi $x^2 - y^2 = 0$ och $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$. Integralen blir lika med noll.

Förslag 2 Genom att integrera differentialekvationerna

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

vi upptäcker att funktionen

$$U(x, y) = \ln \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

är en potential. Integralen kan beräknas som

$$\int_{\gamma} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) = U(3, 3) - U(1, 1) = \ln \frac{9}{9+9} - \ln \frac{1}{1+1} = 0.$$

2 Betrakta följande potensserier

(a) i.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)(1+k^2)}{(1+(k+1)^2)(k+1)} \rightarrow 1 \Rightarrow R = 1.$$

ii. Vi har samma kvot som ovan

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow 1 \Rightarrow R = 1.$$

iii.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5}{k+1} \rightarrow 0 \Rightarrow R = \infty$$

iv.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2(1+e^{-k})}{(1+e^{-(k+1)})k^2} \rightarrow 1 \Rightarrow R = 1$$

v.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{7^k}{7^{k+1}} = \frac{1}{7} \Rightarrow R = 7$$

(b) Se boken.

(c) Man måste välja en cirkel med radie som är strikt mindre än konvergensraden, t.e. $B_{0.9}$ - disken med radie 0.9.

3 (a) Se boken.

(b) Låt oss beteckna med K kroppen som ligger mellan ytorna. Studenten vill kolla att

$$\int \int_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int \int \int_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz, \quad (1)$$

där $\vec{N}$ är normalen till randen $\partial K = Y_1 \cup Y_2$.

Vi beräknar alla integraler var för sig:

Ytan Y_1 kan parameteriseras som $(x, y, x^2 + y^2)$ med normalvektorn $\vec{N} = (2x, 2y, -1)$.

$$\begin{aligned} \int_{Y_1} \vec{F} \cdot \vec{N} ds &= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2, y^2, (x^2+y^2)^2) \cdot (2x, 2y, -1) dx dy \\ &= - \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)^2 dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 dr d\phi = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

där vi pga symmetriskäll ignorerar integraler av $2x^3$ och $2y^3$.

$$\begin{aligned} \int \int_{Y_2} \vec{F} \cdot \vec{N} ds &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 r dr d\phi = \pi. \\ \int \int \int_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= 2 \int \int \int_K (x+y+z) dx dy dz \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} (r \cos \phi + r \sin \phi + z) r dr d\phi \right) dz \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} z \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} d\phi \right) dz \\ &= 2 \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Formeln (1) stämmer.

- 4 (a) Se boken
(b) Se boken
(c) Vi kollar nämnaren och löser ekvationen

$$z^3 - 8z^2 + 15z - 26 = 0$$

Alla rationella lösningar måste vara heltal och dela $26 = 2 \times 13$. Möjliga nollställena är: $\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$. Inspektionen ger oss att $z_1 = 2$ är en lösning. Vi delar polynomet med $z - 2$

$$z^3 - 8z^2 + 15z - 26 = (z - 2)(z^2 - 6z + 13).$$

Lösningarna till den kvadratiske ekvationen $z^2 - 6z + 13 = 0$ är

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{26 - 4 \times 13}}{2} = 3 \pm 2i.$$

För alla singulära punkter gäller $|z_j|^2 \leq 4^2 = 16$

$$|z_1|^2 = 4, |z_{2,3}|^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Alla sinulära punkter ligger inom cirkeln. Betrakta en följd av cirklar C_R av radie $R \geq 4$. Integralerna över cirkeln är lika med varandra eftersom funktionen är analytisk mellan varje två cirklar. Låt oss uppskatta integralen över cirkel C_R där R är tillräckligt stor:

$$\left| \int_{C_R} \frac{z+2}{z^3 - 8z^2 + 25z - 26} dz \right| \leq 2\pi R \frac{R+2}{R^3 + -8R^2 - 25R - 26} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Slutsatsen är att integralen måste vara lika med 0.