MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till entamen i
Mathematik II Analys del B
den 7 januari 2026

1 Eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

är integralen oberoende av vägen om man undviker origo - den enda singulära punkten. Vi kan försöka hitta en potential $U(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} & = & \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & = & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow U(x,y) = \ln(x^2+y^2) + C,$$

där konstanten C kan sättas lika med noll.

Integralen längst γ kan beräknas med hjälp av insättningsformeln:

$$\int_\gamma \ldots = U(2,2) - U(2,0) = \ln(2^2+2^2) - \ln 2^2 = \ln 2.$$

2 (a) Det räcker att utveckla funktionen $\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{1-z^2} = -\left(1+z^2+z^4+\ldots+z^{2n}+\ldots\right)$. Potensserien för f blir

$$f(z) = -z^3 - z^5 - \ldots - z^{2n+1} - \ldots.$$

Konvergensradien kan bestämmas på två olika sätt:

i. Funktionen f är analytisk för $z \neq \pm 1$. Avståndet från origo till den närmaste singulariteten är 1, vilket innebär att konvergensradien är lika med 1.
ii. Den geometriska serien ovan $1+z^2+z^4+\ldots+z^{2n}+\ldots$ konvergerar för $|z^2|<1$ och divergerar för $|z^2|>1$. Konvergensradien är lika med 1.

För att bestämma derivator använder vi att koefficienterna i Taylorsutvecklingen ges av

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

För $n = 0,1,2$ får vi

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

Alla högre derivator kan bestämmas

$$\frac{f'''(0)}{3!} = -1 \Rightarrow f'''(0) = -3!$$

$$\frac{f^{2n}}{2n!} = 0 \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0, \quad n = 2,3,4,\ldots$$

$$\frac{f^{2n+1}(0)}{(2n+1)!} = -1 \Rightarrow f^{2n+1}(0) = -(2n+1)!, \quad n = 2,3,\ldots$$

(b) Serien konvergerar likformigt i varje cirkel av radien strickt mindre än 1, till exempel inom cirkeln $|z| < 0.99$.

3 (a) Se boken.

(b) Se boken.

(c) Vi kompletterar ytan Y med botten Y_1

$$Y_1 = \Big\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\Big\}.$$

Flödesintegralen genom botten är enkelt att beräkna:

$$\vec{F}(x,y,0) = (xy^2, x^2y, 0),\ \vec{N}(x,y,0) = (0,0,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow \int\int_{Y_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0.$$

Genom att använda Gauß sats för halvellipsoiden K får vi

$$\int\int_Y \vec{F} \cdot \vec{N} dS + \underbrace{\int\int_{Y_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS}_{=0} = \int\int\int_K \operatorname{div} \vec{F}\, dV.$$

Det återstår att beräkna volymintegralen

$$\begin{aligned}
\int\int\int_K \operatorname{div} \vec{F}\, dV &= \int\int\int_K (y^2 + x^2 - 1) dV \\
&= \int_0^{1/2} \Big(\int\int_{x^2+y^2 \leq 1-4z^2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy\Big) dz \\
&= 2\pi \int_0^{1/2} \Big(\int_0^{\sqrt{1-4z^2}} (r^2 - 1) r dr\Big) dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{1/2} (r^4 - 2r^2)\Big|_{r=0}^{\sqrt{1-4z^2}} dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{1/2} (1 - 8z^2 + 16z^4 - 2 + 8z^2) dz \\
&= -\frac{\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Flödet är negativt eftersom produktionen inom området är negativ.

4 Vi kollar nämnaren och löser ekvationen

$$z^3 - 8z^2 + 15z - 26 = 0$$

Alla rationella lösningar måste vara heltal och dela $26 = 2 \times 13$. Möjliga nollställena är: $\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$. Inspektionen ger oss att $z_1 = 2$ är en lösning. Vi delar polynomet med $z - 2$

$$z^3 - 8z^2 + 15z - 26 = (z - 2)(z^2 - 6z + 13).$$

Lösningarna till den kvadratiska ekvationen $z^2 - 6z + 13 = 0$ är

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{26 - 4 \times 13}}{2} = 3 \pm 2i.$$

Av alla singulära punkter, bara punkten $z_1 = 2$ ligger inom cirkeln av radie 3. Integralen är lika med residyn i punkten $z_1 = 2$

$$\int_C \frac{z+2}{z^3 - 8z^2 + 25z - 26} dz = 2\pi i \frac{z+2}{z^2 - 6z + 13}\Big|_{z=2} = 2\pi i \frac{4}{4 - 24 + 13} = \frac{8\pi i}{5}.$$

1. **5**

(a) Påståendet är falskt: funktionen $f(z) = |z|^2$ är kontinuerlig men inte analytisk i $|z| < 1$.

(b) Påståendet är sant eftersom alla analytiska funktioner är deriverbara och därför kontinuerliga.