

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift.

Minst 15 poäng, varav minst 5 från teorifrågorna, garanterar godkänt betyg. Förutsatt att du får minst 5 poäng från teoridelen, garanterar minst 15 poäng betyget E, 18 betyget D, 21 betyget C, 24 betyget B och 27 betyget A.

1. [4p] Använd Greens sats för att beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} y \, dx + x^2 \, dy,$$

där γ är den *negativt orienterade* ellipsen $\{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 1\}$.

Facit:

$$\boxed{\int_{\gamma} y \, dx + x^2 \, dy = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) **[1p] (Teoriuppgift)** Ange definitionen för *konservativt fält* i det öppna området $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
(b) Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + 2xy, xz + z^2, xy)^T.$$

- i. **[2p]** Undersök huruvida fältet $\mathbf{F}$ är konservativt eller inte i $\mathbb{R}^3$, och bestäm i så fall en potentialfunktion till $\mathbf{F}$.
ii. **[2p]** Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ kan parametreras som

$$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}e^t)^T, \quad t \in [0, 1].$$

Facit:

- (a) Kolla kurslitteratur.
(b) i. Det är inte konservativt.
ii.

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sqrt{2}(e - 1).$$

3. (a) [1p] (Teoriuppgift) Formulera *Stokes sats* för ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i $\mathbb{R}^3$.
 (b) Låt ytan Y vara

$$Y = \{(x, y, z) : z = 5 - x^2 - y^2, \quad 1 < z < 4\}$$

orienterad med normalfältet $\mathbf{n} = -(2x, 2y, 1)/(\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2})$. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)^T.$$

- i. [2p] Skissa ytan Y och visa att den orienterade randen av Y består av två enkla slutna kurvor C_1, C_2 som inte skär varandra ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$). Ange positiva parametriseringar, relativt orienterade ytan Y , av kurvorna C_1 och C_2 .
 ii. [3p] Beräkna

$$I = \iint_Y (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{S}.$$

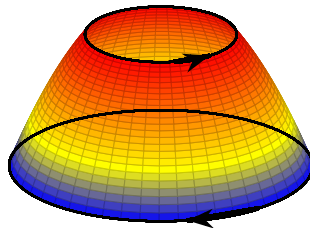
Tips: Om ni behöver det, får ni använda utan bevis att $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$.

Facit:

- (a) Kolla kurslitteratur.
 (b) i. Randen av ytan består av två cirklar, som vi kallar C_1, C_2 . Dessa beskrivs som

$$C_1 = \{(x, y, z) : z = 1, \quad x^2 + y^2 = 4\},$$

$$C_2 = \{(x, y, z) : z = 4, \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$



Vi måste orientera dem relativt ytan Y , som har normalvektorn $\mathbf{n}$. För den övre cirkeln väljer vi parametrisering

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 4), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

För den nedre cirkeln måste orienteringen vara medurs:

$$\gamma_2(t) = (2 \cos t, -2 \sin t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- ii. $I = 9\pi$.

4. Låt $I \subset \mathbb{R}$ vara ett intervall.

- (a) [1p] (**Teoriuppgift**) Definiera begreppet *likformigt konvergent funktionsföljd* av reellvärda funktioner på I .
- (b) [3p] (**Teoriuppgift**) Visa att om en följd $\{f_n\}_n$ av reellvärda funktioner på I konvergerar likformigt mot f , och varje f_n är kontinuerlig på I , då måste f också vara kontinuerlig.
- (c) [1p] Låt $f_n(x) = e^{-nx}$. Konvergerar följden $\{f_n\}_n$ likformigt på $[0, 1]$?
- (d) [1p] Låt $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$ vara en serie av funktioner som konvergerar likformigt mot en funktion s på I . Visa att $\{g_n\}_n$ konvergerar likformigt mot 0 på I .

Facit:

- (a) Kolla kurslitteratur.
- (b) Kolla kurslitteratur.
- (c) Nej. Punktviss konvergerar följden av kontinuerliga funktioner $\{f_n(x)\}_n$ mot

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 0 \\ 0 & \text{om } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

då $n \rightarrow +\infty$, som inte är kontinuerlig. Det ger att $\{f_n(x)\}$ kan inte konvergera likformigt.

- (d) Om vi låt, för varje $n \in \mathbb{N}$, $s_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$, och $s(x)$ dess likformigt gränsvärde då $n \rightarrow +\infty$, har vi

$$g_n(x) = s_n(x) - s(x) + s(x) - s_{n-1}(x).$$

för varje $x \in I$.

Det medför

$$0 \leq \sup_{x \in I} |g_n(x)| \leq \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| + \sup_{x \in I} |s_{n-1}(x) - s(x)|.$$

Resultaten följer av definitionen av likformig konvergens.

5. (a) **[2p] (Teoriuppgift)** Ange definitionen för *nollmängd* och *kvadrerbar mängd* i planet.
 (b) **[2p]** Låt $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller att

$$\sup_{0 \leq x_1 < x_2 \leq 1} \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = M < \infty.$$

Visa direkt från definitionen av nollmängd att mängden

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x), x \in [0, 1]\}$$

är en nollmängd i planet.

Facit:

- (a) Kolla kurslitteratur.
 (b) Låt ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Givet $N \in \mathbb{N}$ som uppfyller att $N > \frac{2M}{\varepsilon}$, definierar vi

$$x_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Definiera rektanglar

$$R_j = [x_j, x_{j+1}] \times \left[\varphi(x_j) - \frac{M}{N}, \varphi(x_j) + \frac{M}{N} \right], \quad j = 0, \dots, N-1$$

och visa att

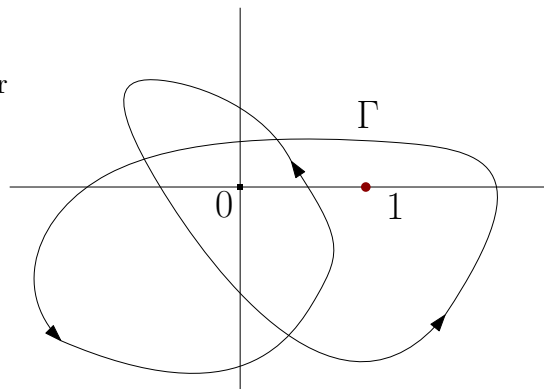
$$\sum_{j=0}^{N-1} |R_j| < \varepsilon, \quad \text{och} \quad S \subset \bigcup_{j=0}^{N-1} R_j.$$

6. (a) [1p] (Teoriuppgift) Formulera *Cauchy-Riemanns ekvationer* och definiera begreppet *analytisk funktion* med hjälp av dem.
- (b) [1p] (Teoriuppgift) Formulera *Cauchy integralformel* som bevisas i kursen.
- (c) [3p] Betrakta kurvan i planet Γ i figuren nedan.

Använd Cauchys integralformeln från kursen för att beräkna

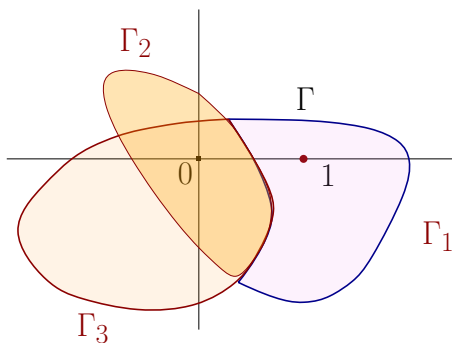
$$\int_{\Gamma} \frac{\cos(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta.$$

Motivera ditt svar.



Facit:

- (a) Kolla kurslitteratur.
- (b) Kolla kurslitteratur.
- (c) Dela upp kurvan i tre olika kurvor $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, sådan att 1 är en inre punkt till Γ_1 men 0 ligger utanför, medan 1 ligger utanför Γ_2 och Γ_3 och 0 ligger inuti dessa två kurvor. Vi gör det sådant att varje kurva begränsa en enkel sammanhängande området.



Notera att $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_1 \cap \Gamma_3$ genomlöps tre gånger. Två gånger med moturs orientering som delmängd av Γ_2 , och en med medurs orientering. Så gäller att

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} f(\zeta) d\zeta.$$

Vi kan nu använda Cauchy integralformel från 6.(b) för att visa att

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta-1)} d\zeta = -6\pi i.$$