

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna (T), krävs för godkänt.

1. (a) Beräkna integralen, med hjälp av potential, $\int_{(1,1,1)}^{(9,8,7)} yzdx + zxdy + xydz$. (2p)
- (b) (T) Ange definitionen av att en kurvintegral är oberoende av vägen. (1p)
- (c) (T) Avgör om påståendet nedan är sant eller falskt. (Motivera ditt svar med ett skiss på bevis eller motexempel) *Om kurvintegralen över alla slutna kurvor som ligger i ett område är lika med noll, så har fältet har en potential i detta område.* (2p)

2. Beräkna kurvintegralen direkt och med hjälp av Greens formel

$$\int_{\gamma} (x+y)dx - (x-y)dy$$

där γ är ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) orienterad moturs. (5p)

3. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet $\mathbf{u} = (xz, 2yz, xy + z^2)$ ut ur cylindern

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, -1 \leq z \leq 1\}$$

tillsammans med två lock. (5p)

4. (a) (T) Formulera Cauchy-Riemanns ekvationer och definiera begreppet analytisk funktion med hjälp av dem. (1p)
- (b) (T) Ge ett exempel på två funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ som är kontinuerligt deriverbara, men som inte uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. (1p)
- (c) Låt $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ vara orienterad moturs. Beräkna kurvintegralerna

$$\int_{\gamma} \frac{z}{3+z} dz \text{ och } \int_{\gamma} \frac{|z|^2}{3\bar{z} + |z|^2 z} dz. \quad (3p)$$

5. (a) (T) Betrakta en följd $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ av kontinuerliga funktioner $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$. (2p)

- (b) (T) Konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^2 x^2}$ punktvis på $[0, 1]$? Konvergerar serien likformigt på $[0, 1]$? (3p)

6. Låt $f(z) = \frac{1+z}{z^4 + \pi^2 z^2}$.

- (a) Bestäm en potensserie av f för $|z| < \pi$. (2p)
- (b) Beräkna, för alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$, integralen

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz$$

där γ_n är den positivt orienterade cirkeln $|z| = n$. (3p)