Lösningsförslag för MM5011, 2025-08-12

(1) (a) Beräkna integralen, med hjälp av potential, $\int_{(1,1,1)}^{(9,8,7)} yzdx + zxdy + xydz$.

(b) (**T**) Ange definitionen av att en kurvintegral är oberoende av vägen. (1p)

(c) (**T**) Avgör om påståendet nedan är sant eller falskt. (Motivera ditt svar med ett skiss på bevis eller motexempel) *Om kurvintegralen över alla slutna kurvor som ligger i område är lika med noll, så har fältet har en potential i detta område.* (2p)

Lösningsförslag.
(a) För att hitta potentialen U till fältet $F = (yz, zx, xy)$ behöver vi lösa ekvationssystemet $U'_x = yz, U'_y = zx, U_z = xy$. Vi ser att den är lika med gradienten till $U = xyz$. Alltså är den en potential till F. Så

$$\int_{(1,1,1)}^{(9,8,7)} yzdx + zxdy + xydz = U(9,8,7) - U(1,1,1) = 503.$$

(b) (c) Se boken PB.

(2) Beräkna kurvintegralen direkt och med hjälp av Greens formel

$$\int_\gamma (x+y)dx - (x-y)dy$$

där γ är ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orienterad moturs. (5p)

Lösningsförslag. (i) Med Greens formel:

$$\int_\gamma (x+y)dx - (x-y)dy = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} (-1-1)dxdy = -2\pi ab.$$

(ii) Direkt:

$$\int_\gamma (x+y)dx - (x-y)dy = \int_0^{2\pi} (a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - b\sin t)(b\cos t))dt = -2\pi ab.$$

(3) Beräkna flödesintegralen av vektorfältet $\mathbf{u} = (xz, 2yz, xy + z^2)$ ut ur cylindern

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, -1 \le z \le 1\}.$$

(5p)

Lösningsförslag. Se exempelvis 20240223 uppgift 2.

(4) (a) (**T**) Formulera Cauchy-Riemanns ekvationer med samtliga förutsättningar. (1p)

(b) (**T**) Ge ett exempel på två funktioner $u(x,y)$ och $v(x,y)$ som är kontinuerligt deriver- bara, men som inte uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. (1p)

(c) Låt $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ vara orienterad moturs. Beräkna kurvintegralerna
$\int_\gamma \frac{z}{3+z}dz$ och $\int_\gamma \frac{|z|^2}{3\bar{z} + |z|^2 z}dz.$ (3p)

Lösningsförslag. Notera att integralerna är lika. Se exempelvis 20240223 uppgift 3.

(5) (a) (**T**) Betrakta en följd $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ av kontinuerliga funktioner $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att serien $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$. (2p)

(b) (**T**) Konvergerar serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{x}{1+k^2x^2}$ punktvis på $[0,1]$? Konvergerar serien likformigt på $[0,1]$? (3p)

Lösningsförslag. Se Kompendiet Analytiska funktioner, etc på kursens hemsida.

(6) Låt $f(z) = \frac{1+z}{z^4+\pi^2z^2}$.

(a) Bestäm en potensserie av f för $|z| < \pi$. (2p)

(b) Beräkna, för alla $n = 1, 2, 3, ...,$ integralen

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz,$$

där γ_n är den positivt orienterade cirkeln $|z| = n$, integralen (3p)

Lösningsförslag. Se exempelvis 20250221 uppgift 5.