Algebra och Kombinatorik
HT 2018
Omtentamen
6 mars 2019
9:00-14:00

Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
Varje korrekt löst uppgift ger fyra poäng. Lycka till!

1. Låt H vara en $n \times m$ checkmatris, och låt C vara koden $\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/2)^m : H\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor i $(\mathbb{Z}/2)^m$, och låt C' vara koden $\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/2)^m : H\mathbf{x} = H\mathbf{v}\}$. Visa att C och C' har samma antal element och samma minimumavstånd.

2. Hur många sexsiffriga tal (dvs. tal x med $100\ 000 \leq x \leq 999\ 999$) finns det där varje siffra förekommer exakt två gånger? Till exempel är 188 717 och 267 726 sådana tal.

3. Visa att den symmetriska gruppen S_n har element av ordning m för alla $1 \leq m \leq n$. Visa också att S_n inte har ett element av ordning $n+1$, om $n+1$ är ett primtal.

4. Ola drar fem kort från en kortlek. Hur stor är sannolikheten att han får minst två kort med samma valör? (En kortlek består av 52 kort i 13 olika valörer; det finns 4 stycken kort av varje valör.)

5. Definiera en relation $\sim$ på mängden $\mathbb{Z}$ av heltal enligt $x \sim y \iff x^3 \equiv y^3 \pmod{12}$. Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation, och ange exakt ett element ur varje ekvivalensklass.

6. Lös följande system med två ekvationer och två obekanta i $\mathbb{Z}/16$, eller visa att det saknar lösningar.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - 2y &= 2. \end{aligned}$$