MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Dan Petersen
Kontrollant: Sofia Tirabassi

Tentamensskrivning i
Algebra och Kombinatorik, MM5013
7.5 hp
2017-05-24

Inga hjälpmedel är tillåtna. 15 poäng eller mer (med eventuella bonuspoäng) garanterar godkänt betyg. Motivera dina svar noggrant. Problemen är INTE ordnade i svårighetsgrad.

(1) Antag att du har tre lådor numrerade 1, 2 och 3, som ska målas. Låt n vara ett positivt heltal och låt X_n vara mängden av sätt att måla de tre lådorna om du har n färger att välja mellan, och två lådor tillåts ha samma färg.
  (a) Beräkna $|X_2|$ och $|X_4|$. 1 p.
  (b) Hitta en formel för $|X_n|$ för alla n. 2 p.

  Den symmetriska gruppen S_3 verkar på X_n genom att numrera om lådorna.
  (c) Beräkna antalet banor för denna gruppverkan när $n = 4$. 1 p.
  (d) Hitta en formel för antalet banor för alla n. 2 p.

(2) Betrakta följande 5-tuplar av heltal.
  - (3,3,3,1,2)
  - (4,4,4,3,2)
  - (4,4,4,2,2)
  - (2,2,2,2,2)

  (a) För var och en av dem avgör huruvida det existerar en graf med fem noder och grader som i den givna tupeln. Om ja, ge ett exempel; om nej, motivera ditt svar. 2 p.
  (b) För varje 5-tupel så att en sådan graf existerar, avgör huruvida grafen har ett Eulerspår. Om ja, ge ett exempel; om nej, motivera ditt svar. 2 p.

(3) (a) Visa att grupperna $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ och $\mathbb{Z}/4$ inte är isomorfa. 2 p.
  (b) Visa mer allmänt att för varje heltal $n \geq 2$ är grupperna $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$ och $\mathbb{Z}/n^2$ inte isomorfa. 2 p.

(4) Betrakta summan $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
  (a) Beräkna värdet av summan modulo 7 för $n = 0, 1, \ldots, 6$. 3 p.
  (b) Visa att värdet av summan modulo 7 enbart beror på värdet av n modulo 7. 3 p.

(5) Betrakta följande $m \times n$ checkmatris (d.v.s. matris med koefficienter i $\mathbb{Z}/2$):

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  (a) Hitta alla element i motsvarande kod (d.v.s. kärnan till H, $\operatorname{Ker} H$). 2 p.
  (b) Betrakta kodens längd, dimension och minimumavstånd. 2 p.
  (c) Antag att meddelandet $\mathbf{z} = 111010$ endast har ett fel. Rätta felet i $\mathbf{z}$. 2 p.

(6) (a) Hitta alla rötterna till polynomet $x^4 + 4x^3 + x^2 + 4$ i $(\mathbb{Z}/5)[x]$. 2 p.

(b) Faktorisera polynomet $x^4+4x^3+x^2+4$ i $(\mathbb{Z}/5)[x]$ i irreducibla faktorer. 2 p.

1. English version

This is the exam of the previous page translated into English. If there should be any difference please refer to the Swedish version.

No aids are allowed. A score of 15 or more (eventually counting bonus points) is guaranteed a passing grade. Carefully motivate your solutions. The problems are NOT in order of difficulty.

(1) Suppose you have 3 boxes (labeled with the numbers 1, 2 and 3) that must be painted. Let n a positive integer and let X_n be the set of all the possible way to paint the 3 boxes if there are n colors available (two boxes can be painted with the same color).
  (a) Compute $|X_2|$ and $|X_4|$. 1 p.
  (b) Find a formula for $|X_n|$ for any n. 2 p.
  The symmetric group S_3 acts on X_n by interchanging the labels of the boxes.
  (c) Compute the number of orbits of the action when $n = 4$. 1 p.
  (d) Find a formula computing the number of orbits for every n. 2 p.

(2) Consider the following 5-tuples of numbers.
  - (3,3,3,1,2)
  - (4,4,4,3,2)
  - (4,4,4,2,2)
  - (2,2,2,2,2)

  (a) For each one of them determine if there is a graph with 5 vertices having the given 5-tuple as degree table. If yes, provide an example; if no, justify your answer. 2 p.
  (b) For each 5-tuple such that a graph exists, determine if it admits an *Eulerspår* (what the book calls an Euler path). If yes, provide an example; if no, justify your answer. 2 p.

(3) (a) Show that the group $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ is not isomorphic to $\mathbb{Z}/4$. 2 p.
  (b) More generally show that for every integer $n \geq 2$ the group $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$ is not isomorphic to $\mathbb{Z}/n^2$. 2 p.

(4) Consider the sum $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
  (a) Compute the value of this sum modulo 7 for $n = 0, 1, \ldots, 6$. 3 p.
  (b) Show that the value of this sum modulo 7 depends only on the value of n modulo 7. 3 p.

(5) Consider the following $m \times n$ check matrix (i.e. a matrix with coefficients in $\mathbb{Z}/2$):

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  (a) Find all the elements in the corresponding code (i.e. the kernel of H, $\operatorname{Ker} H$). 2 p.
  (b) Compute the length, dimension and minimum distance of the code. 2 p.
  (c) Suppose that the message $\mathbf{z} = 111010$ has only one error. Correct $\mathbf{z}$. 2 p.

(6) (a) Find all roots of the polynomial $x^4 + 4x^3 + x^2 + 4$ in $(\mathbb{Z}/5)[x]$. 2 p.
(b) Factor the polynomial $x^4 + 4x^3 + x^2 + 4$ in $(\mathbb{Z}/5)[x]$ into irreducible factors. 2 p.