MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
28 maj 2021

Lösningsförslag

1. Betrakta polynomet $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

   (a) Hitta alla rötter till $p(x)$ i $\mathbb{Z}_3$. 2p

   (b) Faktorisera $p(x)$ i irreducibla faktorer. 3p

   Lösning: Vi börjar först med att hitta rötterna till $p(x)$. Vi ser att $p(0) = 1$, och att $p(1) = 0$, samt att $p(2) = 2$. Således gäller det att 1 är den enda roten till $p(x)$ i $\mathbb{Z}_3$. Vi faktoriserar nu $p(x)$ och börjar med att dela $p(x)$ med polynomet $x-1$ och om vi utför polynomdivision så får vi att $p(x) = (x-1)(x^4+x+2)$. Vi vill nu undersöka om vi kan faktorisera polynomet $q(x) = x^4 + x + 2$ ytterligare. Vi ser enkelt att $q(x)$ saknar rötter. Detta innebär att om $q(x)$ ej är irreducibelt så måste $q(x)$ vara en produkt av två polynom av grad 2. Så vi låter $r(x) = ax^2 + bx + c$, och $s(x) = dx^2 + ex + f$ för några $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_3$ och antar att $q(x) = r(x)s(x)$. Efter lite eftertanke ser vi att vi kan anta att att $a = d = 1$, och vi får då från likheten $q(x) = r(x)s(x)$ följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} e + b &= 0 \\ eb + c + f &= 0 \\ bf + ec &= 1 \\ cf &= 2. \end{aligned}$$

   Vi ser att av ekvationen $cf = 2$ så måste en av c eller f vara lika med 2, den andra vara lika med 1; antag nu utan förlust av generalitet att $c = 2, f = 1$. Vårt ekvationssystem blir då, med detta val av c och f :

$$\begin{aligned} e + b &= 0 \\ eb &= 0 \\ b + 2e &= 1. \end{aligned}$$

   Vi har då att $e = -b$, samt att $eb = 0$, vilket ger att $e = b = 0$. Då säger vår sista ekvation att $b + 2e = 0 + 2 \cdot 1 = 0 = 1$, vilket är en motsägelse eftersom att $0 \neq 1$ i $\mathbb{Z}_3$. Detta innebär att $q(x)$ är irreducibelt, så att faktoriseringen av $p(x)$ i irreducibla faktorer är $(x - 1)(x^4 + x + 2)$.

2. Låt $\sigma = (1\ 7\ 6\ 3\ 2\ 9\ 10\ 5)(4\ 11\ 8)$ och $\tau = (1\ 5)(3\ 7)(4\ 2)(6\ 11)(8\ 10\ 9)$ vara element i den symmetriska gruppen S_{11}.

   (a) Bestäm σ^{-1} och τ^2 på cykelform. 1p

   (b) Bestäm ordningen av σ och $\tau\sigma$. 2p

   (c) Existerar det ett $k > 0$ så att ekvationen $\gamma\sigma^k = \tau\gamma$ med $\gamma \in S_{11}$ har en lösning? Om det existerar en lösning, skriv ner en lösning, och om ingen lösning existerar, bevisa att ingen lösning finns. 2p

   Lösning: Vi ser enkelt att σ^{-1} är permutationen $(5\ 10\ 9\ 2\ 3\ 6\ 7\ 1)(8\ 11\ 4)$ (cykeldekompositionen av σ^{-1} fås från σs cykeldekomposition genom att "läsa baklänges"). För att beräkna τ^2 så ser vi att alla cykler av längd 2 i τ kommer att gå på identitetspermutationen i τ, och vi behöver då bara beräkna vad $(8\ 10\ 9)^2$ är för något, och vi ser att detta är $(8\ 9\ 10)$, så att $\tau^2 = (8\ 9\ 10)$. Vi bestämmer nu ordningen av σ genom att notera att σ har cykeltyp $[3^1, 8^1]$ och av en känd sats är då ordningen minsta gemensamma multipeln av 3 och 8, vilket är 24. Om man sedan beräknar $\tau\sigma$ i cykelform så får man att $\tau\sigma = (1\ 3\ 4\ 6\ 7\ 11\ 10)(2\ 8)$ och denna permutation har ordning 14, av samma resonemang som tidigare.

Det som nu kvarstår är att bestämma om det existerar ett $k > 0$ så att ekvationen $\gamma\sigma^k = \tau\gamma$ har en lösning. Vi multiplicerar båda led till höger med γ^{-1} och får då $\gamma\sigma^k\gamma^{-1} = \tau$. Vi ser att påståendet: det existerar ett $k > 0$ så ekvationen har en lösning, är ekvivalent till påståendet att det existerar ett $k > 0$ så att σ^k och γ har samma cykeltyp. Man noterar att för att se hur σ^ks cykeltyp varierar då k varierar, så är det nog att studera cykeltyperna av σ_1^k och σ_2^k då k varierar, där $\sigma_1 = (1\ 7\ 6\ 3\ 2\ 9\ 10\ 5)$ och $\sigma_2 = (4\ 11\ 8)$. Vi ser då att $\sigma_1^4 = (1\ 2)(3\ 5)(6\ 10)(7\ 9)$ och att $\sigma_2^4 = (4\ 11\ 8)$. Så, om $k = 4$ så ser vi att det existerar en lösning; vi går nu vidare med att finna en lösning. Beviset av Sats 12.5 i Biggs ger oss en metod för hur vi kan hitta γ : idén är att konjugering med γ är ett sorts basbyte. Vi definierar γ genom regeln $\gamma(1) = 1, \gamma(2) = 5, \gamma(3) = 3, \gamma(5) = 7, \gamma(6) = 6, \gamma(10) = 11, \gamma(7) = 4, \gamma(9) = 2, \gamma(4) = 8, \gamma(11) = 10, \gamma(8) = 9$. I cykelform kan vi skriva $\gamma = (2\ 5\ 7\ 4\ 8\ 9)(10\ 11)$. Vi ser då att $\gamma\sigma^4\gamma^{-1} = \tau$. Notera att γ ej är unikt bestämd, så det existerar fler val av γ som löser ekvationen.

3. Låt G, H vara två grupper och $f : G \to H$ en homomorfi mellan G och H (kom ihåg att f är en homomorfi precis då $f(gh) = f(g)f(h)$ för alla $g, h \in G$). Kalla identitetselementet i H för e_H.

   (a) Definiera $\ker f = \{g \in G | f(g) = e_H\}$. Bevisa att $\ker f$ är en delgrupp av G. 3p

   (b) Bevisa att om H är abelsk (kursboken kallar sådana grupper kommutativa), då är
   $$ghg^{-1}h^{-1} \in \ker f$$
   för alla $g, h \in G$. 2p

   Lösning: Vi bevisar att ker f är en delgrupp genom att använda oss av delgruppstestet, det vill säga, vi visar att om $g, h \in \ker f$ så gäller även att $gh^{-1} \in \ker f$. Vi noterar att $f(gh^{-1}) = f(g)f(h^{-1})$. Av antagande vet vi att $f(g) = e_H$, och eftersom att $f(h^{-1}) = f(h)^{-1}$ så ser vi att $f(h^{-1}) = e_H$, vilket ger att, eftersom e_H är identitetselementet i H, att $f(gh^{-1}) = e_H$, och detta betyder att $gh^{-1} \in \ker f$. Således är $\ker f$ en delgrupp.

   Om vi nu antar att H är en abelsk grupp så har vi, per definition, att $xy = yx$ för alla $x, y \in H$, vilket är ekvivalent till påståendet att $xyx^{-1}y^{-1} = e_H$ för alla $x, y \in H$. Om $g, h \in G$ så ser vi alltså att $f(ghg^{-1}h^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1}f(h)^{-1} = e_H$, vilket betyder att $ghg^{-1}h^{-1} \in \ker f$, och det var vad vi ville visa.

4. Låt C vara den linjära kod som definieras av checkmatrisen
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Finn alla kodord i C och beräkna det minsta avståndet för C. 3p

   (b) Låt nu $C \subset \mathbb{Z}_2^n$ vara en *godtycklig* linjär kod som definieras av en checkmatris H. Bevisa att det minimala avståndet för C är lika med det minimala antalet kolumner av H som är linjärt beroende. Kom ihåg att element $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}_2^n$ är linjärt beroende precis då det existerar element $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_2$, inte alla lika med noll, så att $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$. 2p

Lösning: Vi börjar med att finna alla kodord i C genom att beräkna nollrummet (alternativt, kärnan) av matrisen ovan. Vi radreducerar vår matris, vilket inte påverkar nollrummet, för att få
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi då låter $v \in \mathbb{Z}_2^6, v^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ så ser vi att v ligger i nollrummet om och endast om $x_1 = x_5 + x_6, x_2 = x_5, x_3 = x_5 + x_6, x_4 = x_5 + x_6$, medan x_5 och x_6 är fria variabler. Således kommer nollrummet innehålla 4 element, och vi ser att

$$C = \{(0,0,0,0,0,0), (1,1,1,1,1,0), (1,0,1,1,0,1), (0,1,0,0,1,1)\}.$$

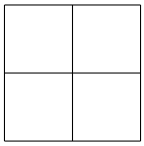
Från detta ser vi att det minsta avståndet är 3, eftersom att enligt sats vi gått igenom på kursen, så är minsta avståndet av en linjär kod C precis samma som minsta vikten (Biggs kallar detta weight) av ett nollskilt element av C.

Vi bevisar nu (b). Vi använder oss återigen av att minsta avståndet av en linjär kod C är detsamma som den minimala vikten av ett nollskilt element i den linjära koden C. Antag att $x \in C$ är ett element så att $w(x) = \delta(C)$, där $w(x)$ är vikten av x, och $\delta(C)$ är det minsta avståndet. Vi kan skriva $x = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ för några $b_i \in \mathbb{Z}_2$, där $e_i \in \mathbb{Z}_2^n$ är den i:te basvektorn i standardbasen, dvs. det element vars enda nollskilda koordinat är i position i. Per definition av att H är checkmatrisen för C så gäller det att $Hx = 0$, men, å andra sidan har vi att

$$Hx = H(\sum_{i=1}^n b_i e_i) = \sum_{i=1}^n b_i H(e_i) = 0.$$

Eftersom att $H(e_i)$ är precis den i:te kolumnen av H så ser vi att $\delta(C)$ är större än eller lika med det minimala antalet linjärt beroende kolumner av H. Säg att det minsta antal kolumner av H som är linjärt beroende är k. Låt oss då välja k linjärt beroende kolumner, säg att den första är kolumn i_1, den andra är kolumn i_2, och så vidare fram till kolumn i_k. Om vi då låter $y = \sum_{j=1}^k e_{i_j}$ så får vi att $Hy = 0$, men också att y har vikt k. Således gäller det att det minsta antalet linjärt beroende kolumner av H är större än eller lika med $\delta(C)$, så av vad vi tidigare har visat är dessa två kvantiteter lika.

5. Betrakta figuren:



Låt X vara mängden av färgläggningar av varje kvadrat i denna figur med en av 10 färger, så att åtminstone två av kvadraterna har färglagts med samma färg.

(a) Vad är kardinaliteten av X? 1p

(b) Kvadratens symmetrigrupp, som bekant består av åtta element, verkar på X. Bestäm antalet element i fixpunktsmängderna för varje element i gruppen. (Svaret ska, precis som vanligt, motiveras noggrant.) 3p

(c) Bestäm antalet banor, dvs. antalet ekvivalensklasser av färgläggningar av kvadraterna i figuren ovan, där två brickor anses ekvivalenta om de går att överföra i varandra genom vridning eller vändning. 1p

Lösning: Det finns åtminstone två vis för att beräkna kardinaliteten av X, ett av dessa sätt är additionsprincipen. Om man väljer att använda additionsprincipen behöver man resonera kring olika delfall, så vi beräknar för enkelhets skull kardinaliteten med en enklare metod: vi har att antalet färgningar där ingen färgning förekommer fler än en gång är lika med $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, så vi får att kardinaliteten av X är $10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4960$. Låt oss kalla kvadratens symmetrigrupp för D_8 och vi skriver

$$D_8 = \{e, r, r^2, r^3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

där e är symmetrin som inte gör någonting, r^k är rotation $90 \cdot k$ grader medsols, s_1 är spegling i den vertikala axeln, s_2 är spegling i den horisontella axeln, s_3 är spegling i axeln som går från det översta vänstra hörnet till det nedersta högra hörnet, och s_4 är spegling i axeln som går från det översta högra hörnet till det nedersta vänstra hörnet. Om vi kallar mängderna av färger för $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{10}\}$ ser vi att vi kan representera varje element av X som en fyrtupel $(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4})$ där F_{i_1} är färgen i det översta vänstra hörnet, F_{i_2} är färgen i det översta högre hörnet, och så vidare. Vi kan nu naturligt tänka oss att D_8 verkar på mängden av sådana fyrtupler där åtminstone två koordinater är samma.

Vi vill nu beräkna fixpunktsmängderna av denna verkan. Det gäller såklart att alla färgningar fixeras av identitetssymmetrin, så att $|X^e|= 4960$. Vi undersöker nu fixpunktsmängderna för rotationerna. Vi har att

$$r(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4}) = (F_{i_4}, F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}),$$

så om en färgning skall vara fix av r så måste $F_{i_1} = F_{i_2} = F_{i_3} = F_{i_4}$. Då gäller att de enda färgningarna som fixeras av r är de då alla färger är samma, så $|X^r|= 10$. Vi fortsätter och ser att $r^2(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4}) = (F_{i_3}, F_{i_4}, F_{i_1}, F_{i_2})$, så om denna färgning är fix av r^2 måste $F_{i_3} = F_{i_1}$, $F_{i_2} = F_{i_4}$. Vi ser då att $|X^{r^2}|= 10^2$. På samma vis som vi resonerade för fixpunktsmängden av r så får vi att $|X^{r^3}|= 10$. Vi undersöker nu fixpunktsmängderna för speglingarna. Det gäller att $s_1(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4}) = (F_{i_2}, F_{i_1}, F_{i_4}, F_{i_3})$ så att $|X^{s_1}|= 10^2$. Om man beräknar att $s_2(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4}) = (F_{i_4}, F_{i_3}, F_{i_2}, F_{i_1})$ inser man snabbt att $|X^{s_2}|= 10^2$. Eftersom att $s_3(F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4}) = (F_{i_1}, F_{i_4}, F_{i_3}, F_{i_2})$ så om denna färgläggning är fix av s_3 måste $F_{i_2} = F_{i_4}$. Av additionsprincipen följer då att $|X^{s_3}|= 10^3$. På samma vis får man att $|X^{s_4}|= 10^3$. Vi har nu beräknat alla fixpunktsmängder.

Slutligen hittar vi antalet banor för denna verkan, och detta antal hittar vi med Burnsides lemma. Om vi applicerar Burnsides Lemma så får vi att $|X/D_8|= \frac{1}{8}(4960+10+10^2+10+10^2+10^2+10^3+10^3) = 910$, så antalet ekvivalensklasser är 910.

6. Åtta vänner skall äta mat på en picknick. De maträtterna som de har tagit med sig är falafelrulle, hamburgartallrik och pizza.

   (a) Antag att de åtta vännerna har med sig ett obegränsat antal av varje rätt. Säg att person A, som ingår i gruppen av vänner, vill plocka på sig, på en gång, 5 portioner av dessa rätter. På hur många vis kan hen göra detta? (För att klargöra: Vi bryr oss *inte* om vilken ordning person A har valt rätterna på, utan det viktiga är endast antalet av varje rätt som förekommer i hens val av 5 portioner). 2p

   (b) Antag nu istället att det finns precis två falafelrullar och tre stycken hamburgartallrikar, och det finns ett obegränsat lager av pizza. Varje person i gruppen skall ta av exakt en maträtt. På hur många vis kan vännerna ta varsin rätt så att varje maträtt har valts av åtminstone en person? (**Ditt svar får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**) 3p

Lösning: Vi börjar med (a). Låt x_1 vara hur många Falafelrullar som person A väljer, x_2 hur många hamburgartallrikar person A väljer, och x_3 antalet pizzor som väljs. Då ser vi att $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Vi ser att man då kan omformulera problemet som att söka efter antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Av en sats vi har gått igenom på denna kursen, så är antalet lösningar $\binom{5+3-1}{2} = \binom{7}{2}$.

Vi löser nu (b). Det finns flera sätt att lösa denna uppgift på, och kanske är den enklaste metoden att helt enkelt använda additionsprincipen och resonera om olika fall (man får sex olika fall). Vi väljer istället att lösa problemet med hjälp av inklusion-exklusion och Stirlingtal. Vi kan omformulera problemet som att bestämma antalet surjektiva funktioner

$$f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{\text{Falafelrulle}, \text{Hamburgartallrik}, \text{Pizza}\}$$

så att:

(1) Antalet element $i \in \{1, \dots, 8\}$ så att $f(i) =$ Hamburgartallrik, är mindre än eller lika med tre

(2) Antalet element $i \in \{1, \dots, 8\}$ så att $f(i) =$ Falafelrulle, är mindre än eller lika med två.

Låt X vara mängden surjektioner $f : \{1, 2, \dots, 8\} \to \{\text{Falafelrulle}, \text{Hamburgartallrik}, \text{Pizza}\}$, och låt X_F vara mängden surjektioner så att antalet i så att $f(i) =$ Falafel är större än eller lika med 3, och X_H vara mängden surjektioner så att antalet i så att $f(i) =$ Hamburgartallrik är större än tre. Vi vill beräkna $|X \setminus (X_F \cup X_H)|$ och vi beräknar nu $|X|$, $[X_F \cup X_H|$; vi beräknar kardinaliteten av den senare mängden genom principen om inklusion-exklusion.

Av Sats 12.3.1 i Biggs så kan vi beräkna att $|X| = S(8,3) \cdot 3!$. För att beräkna $S(8,3)$ (vilket man inte behöver göra för att få full poäng på uppgiften) så använder vi rekursionsformeln och får $S(8,3) = 966$, vilket ger, om man vill, att $|X| = 966 \cdot 3!$. Vi vet att

$$|X_F \cup X_H| = |X_F| + |X_H| - |X_F \cap X_H|,$$

så vi börjar med att beräkna $|X_F|$ och ser att detta är lika med

$$\binom{8}{3} S(5,2) \cdot 2! + \binom{8}{4} S(4,2) \cdot 2! + \binom{8}{5} S(3,2) 2! + \binom{8}{6} S(2,2) \cdot 2!$$

Vi ser att $S(5,2) = 15, S(4,2) = 7, S(3,2) = 3, S(2,2) = 1$ genom att använda oss av rekursionsformeln för Stirlingtal. Detta ger att

$$|X_F| = \binom{8}{3} 15 \cdot 2! + \binom{8}{4} 7 \cdot 2! + \binom{8}{5} 3 \cdot 2! + \binom{8}{6} 2!$$

På samma vis får man att

$$|X_H| = \binom{8}{4} S(4,2) \cdot 2! + \binom{8}{5} S(3,2) \cdot 2! + \binom{8}{6} S(2,2) 2! = \binom{8}{4} 7 \cdot 2! + \binom{8}{5} 3 \cdot 2! + \binom{8}{6} 2!$$

Vi beräknar nu $|X_F \cap X_H|$. De surjektiva funktionerna i $X_F \cap X_H$ satisfierar alltså att

(1) antalet element $i \in \{1, \dots, 8\}$ så att $f(i) =$ Hamburgartallrik, är större än eller lika med fyra

(2) antalet element $i \in \{1, \dots, 8\}$ så att $f(i) =$ Falafelrulle, är större än eller lika med tre.

Så vi ser att $|X_F \cap X_H| = \binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4!3!}$, då en sådan funktion bestäms unikt när vi bestämt vilka element som skall avbildas på hamburgartallrikar, vilka element som skall avbildas på falafelrullar, och vilka som skall avbildas på pizza. Således är, enligt principen om inklusion-exklusion

$$\begin{aligned} |X_F \cup X_H| &= \left(\binom{8}{3} S(5,2) \cdot 2! + \binom{8}{4} S(4,2) \cdot 2! + \binom{8}{5} S(3,2) \cdot 2! + \binom{8}{6} S(2,2) 2! \right) \\ &+ \left(\binom{8}{4} S(4,2) \cdot 2! + \binom{8}{5} S(3,2) \cdot 2! + \binom{8}{6} S(2,2) 2! \right) - \frac{8!}{4!\,3!}, \end{aligned}$$

och om man skriver det i siffror får man (vilket man inte behöver göra för att få full poäng) att detta är

$$\left(\binom{8}{3} 15 \cdot 2! + \binom{8}{4} 7 \cdot 2! + \binom{8}{5} 3 \cdot 2! + \binom{8}{6} 2! \right) + \left(\binom{8}{4} 7 \cdot 2! + \binom{8}{5} 3 \cdot 2! + \binom{8}{6} 2! \right) - \frac{8!}{4!\,3!}.$$

Om man beräknar detta så är det lika med 4144. Vi beräknar slutligen att $|X \setminus (X_F \cup X_H)|$ är lika med

$$\begin{aligned} S(8,3) \cdot 3! - \Bigg(& \left(\binom{8}{3} S(5,2) \cdot 2! + \binom{8}{4} S(4,2) \cdot 2! + \binom{8}{5} S(3,2) \cdot 2! + \binom{8}{6} S(2,2) 2! \right) \\ & + \left(\binom{8}{4} S(4,2) \cdot 2! + \binom{8}{5} S(3,2) \cdot 2! + \binom{8}{6} S(2,2) 2! \right) - \frac{8!}{4!\,3!} \Bigg). \end{aligned} \tag{1}$$

Detta kan också skrivas som 1652.