MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
11 januari 2022

Lösningsförslag

1. (a) Hur många *positiva* heltalslösningar har $x_1 + x_2 + x_3 = 2021$? 2p

   (b) Betrakta ekvationen
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3) = 77.$$
Hur många *icke-negativa* heltalslösningar existerar till den givna ekvationen? 3p
(**Dina svar för dessa uppgifter får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

   Lösning: För den första deluppgiften så vet vi från föreläsningarna att det finns
$$\binom{2021-1}{2}$$
positiva lösningar till ekvationen. För den andra deluppgiften så noterar vi att $77 = 7 \cdot 11$. Vi ser då att för att ekvationen skall ha en lösning så måste vi ha någon av dessa fyra fall:

   1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, y_1 + y_2 + y_3 = 11$
   2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \cdot 11, y_1 + y_2 + y_3 = 1$
   3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, y_1 + y_2 + y_3 = 7 \cdot 11,$
   4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11, y_1 + y_2 + y_3 = 7.$

   Vi ser att det i första fallet så finns $\binom{3+7}{7}\binom{11+2}{11}$ lösningar, medan det i det andra fallet finns $\binom{3+77}{77}\binom{1+2}{1}$ lösningar, i det tredje $\binom{3+1}{1}\binom{2+77}{77}$ lösningar och slutligen i det fjärde fallet $\binom{3+11}{11}\binom{7+2}{7}$ lösningar. Av additionsprincipen finns det alltså
$$\binom{10}{7}\binom{13}{11} + \binom{80}{77}\binom{3}{1} + \binom{4}{1}\binom{79}{77} + \binom{14}{11}\binom{9}{7} = 281268$$
lösningar.

2. (a) Faktorisera polynomet $p(x) = x^4 + x^3 + 2x + 4$ som en produkt av irreducibla polynom när det betraktas som ett polynom med koefficienter i $\mathbb{Z}_3$ 3p

   (b) Finn alla rötter till polynomet $q(x) = x^{2162} - 1$ i $\mathbb{Z}_8$. 2p

   Lösning: Vi börjar med att faktorisera polynomet över $\mathbb{Z}_3$. Vi ser genom kontroll att vårt polynom $p(x)$ saknar rötter i $\mathbb{Z}_3$, så att om det ej är irreducibelt så är $p(x)$ en produkt av två andragradspolynom. Så antag att
$$p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$
(man ser lätt att det går att anta att de ledande koefficienterna är 1 i faktoriseringen) detta ger ekvationssystemet
$$\begin{cases} a + c = 1 \\ d + b + ac = 0 \\ bc + ad = 2 \\ bd = 4. \end{cases}$$

Från $a + c = 1$ ser vi att $a = 1 - c$, medan $bd = 4 = 1$ ger att antingen är $b = d = 2$ eller $b = d = 1$. I det första fallet så ser vi att $d + b + ac = 2 + 2 + c - c^2 = 1 + c - c^2 = 0$. Men ekvationen $1 + c - c^2$ har inga lösningar i $\mathbb{Z}_3$, vilket ger att ekvationssystemet i detta fall saknar lösningar. På samma vis om $b = d = 1$ så ser man att vi får en motsägelse då det skulle betyda att båda $a + c = 1$ och $a + c = 2$ skulle gälla. Så polynomet är irreducibelt.
Vi har att av Eulers sats gäller att $x^4 = 1$ i $\mathbb{Z}_8$ eftersom att $\varphi(8) = 4$. Detta ger att $q(x)$ har samma rötter som polynomet $x^2 - 1$, och man ser snabbt att dess rötter är $1, 3, 5, 7$.

3. Låt X vara mängden av 2×3-matriser med element från $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Med andra ord ser ett element av X ut som

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

där varje $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ Säg att $A \in X$ är ekvivalent till $B \in X$ om vi kan få B från A genom att permutera kolumnerna och / eller raderna av A.

a) Bevisa att detta ger en ekvivalensrelation på X. 1p

b) Finn antalet ekvivalensklasser för denna relation. 4p

Lösning: För att se att det är en ekvivalensrelation så börjar man med att se att A är ekvivalent med A självt, vi gör helt enkelt inget ingenting med permutationerna eller kolumnerna. Symmetri är klart eftersom att om A är ekvivalent med B så finns det en permutation av raderna och kolumnerna som tar A till B, och den "inversa" permutationen tar B på A. Transitivitet följer också enkelt: Om A är ekvivalent med B och B ekvivalent med C så kan man ta sammansättningen av permutationerna av raderna och kolumnerna för att ta A till C.

Vi använder Burnsides lemma för att hitta ekvivalensklasserna för denna relation. Vi definierar en verkan av $G = S_3 \times \mathbb{Z}_2$ på X. Om $(\sigma, h) \in G$ så tar (σ, h)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

på matrisen som först permuterar kolumnerna i M efter σ och sedan skiftar raderna "cykliskt" h steg nedåt. Exempelvis så tar $((123), 1)$ matrisen M på

$$\begin{pmatrix} a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Vi ser då att antalet ekvivalensklasser för relationen är samma som antalet banor under denna gruppverkan. Vi har att $|G|= 12$ och vi hittar nu fixpunktsmängderna för varje element $g \in G$.

- Om g är identiteten så gäller det att $|X^g| = 5^6$.
- Om $g = (e, 1)$ så gäller det att en matris M är fix av g om och endast om de två raderna är identiska, så i detta fall är $|X^g|= 5^3$.
- Om $g = ((12), 0)$ så gäller det att en matris M är fix av g om och endast om kolumn 1 och 2 är identiska, så i detta fall är $|X^g| = 5^4$.
- Om $g = ((23), 0)$ så gäller det återigen att $|X^g|= 5^4$
- Om $g = ((13), 0)$ så gäller det att $|X^g| = 5^4$.
- Om $g = ((123), 0)$ så gäller att att en matris M är fix av g om och endast om kolumnerna är identiska, så $|X^g|= 5^2$.
- Om $g = ((132), 0)$ så gäller på samma vis att $|X^g|= 5^2$.
- Om $g = ((12), 1)$ så tas matrisen M ovan på $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \end{pmatrix}$. För att denna skall vara fix så måste $a_{22} = a_{11}$ och $a_{21} = a_{12}$ samt att $a_{23} = a_{13}$. Detta ger att $|X^g| = 5^3$.

- Om $g = ((13), 1)$ så gäller med samma resonemang som nyss att $|X^g| = 5^3$
- Om $g = ((23), 1)$ så gäller att $|X^g| = 5^3$.
- Om $g = ((123), 1)$ så för att M skall vara fix måste alla element vara samma, så $|X^g| = 5$.
- Om $g = ((231), 1)$ så gäller återigen $|X^g| = 5$.

Vi summerar då och ser att det finns

$$\frac{5^6 + 5^3 + 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5}{12} = 1505$$

ekvivalensklasser.

4. Låt G vara gruppen $U(\mathbb{Z}_{20})$.

   a) Hur många element har $U(\mathbb{Z}_{20})$? Skriv ner dessa element. 1p

   b) Är gruppen G cyklisk? 1p

   c) Vilka möjliga storlekar finns det för en delgrupp av G? Ge exempel på delgrupper av varje möjlig storlek. 3p

   Lösning: Vi har att det finns $\varphi(20) = \varphi(4)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$ element. Vi kontrollerar enkelt att Gs element är på formen $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$. För att se om gruppen G är cyklisk så beräknar vi $3^2 = 9$, medan $9^2 = 81 = 1$, vilket ger att $3^4 = 1$, så att 3 omöjligt kan generera G. På samma vis $7^2 = 49 = 9$, och $9^2 = 1$, så $7^4 = 1$, vilket ger att 7 ej genererar G. Vi ser att $9^2 = 1, 11^2 = 121 = 1, 13^4 = 1, 17^4 = 1, 19^2 = 1$ så G är ej cyklisk.

   För att slutligen hitta delgrupper av G så börjar vi att notera att Lagranges sats visar att det kan finnas delgrupper av ordning $1, 2, 4$ och 8. Det unika exemplet på en delgrupp av ordning 1 är delgruppen genererat av 1. För att hitta en delgrupp av ordning 2 så kan vi ta delgruppen genererad av 19. För att slutligen hitta en delgrupp av ordning 4 kan vi ta delgruppen genererad av 3. Gruppen G självt ger ett exempel på en delgrupp av ordning 8.

5. a) 20 personer är på en julfest och skall nu alla dansa i en ring. På hur många vis kan dessa personer ställa sig hand i hand i en ring om det dessutom finns två personer, person A och B, som inte skall stå bredvid varandra? 2p

   b) Antag nu istället att de 20 personerna skall dela upp sig i två ringar. I en ring så måste det stå åtminstone en person, men det är OK om endast en person står i ringen. På hur många vis personerna ställa sig i två ringar? 3p
   (**Dina svar får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

   Lösning: Vi noterar att det finns 19! sätt att ställa personerna i en ring på. Detta då det finns 20! sätt att ställa dem på rad och sedan så finns det en rotationssymmetri, så att det finns $20!/20 = 19!$ sätt att bilda en ring. Vi beräknar nu antalet sätt där A och B inte står bredvid varandra genom att subtrahera från 19! de sätt att ställa personerna i en ring där A och B står bredvid varandra. För att beräkna detta så betraktar vi A och B som "en person" och ser att det finns $2 \cdot 18!$ att placera människorna i en ring så att A och B står bredvid varandra. Vi har alltså att det finns $19! - 2 \cdot 18!$ sätt att placera ut personerna runt en ring så att inte A och B står bredvid varandra.

   För att lösa *b*) så använder vi additionsprincipen. Vi börjar med att välja en person, kalla hen person A. Då betraktar vi fallet då det sitter k personer i samma cirkel som person A, där k är ett heltal mellan 0 och 18. Om vi beräknar på hur många vis vi kan placera ut personerna i ringar för varje k i intervallet och summerar så får vi av additionsprincipen svaret. Vi ser att det finns $\binom{19}{k}$ sätt att välja k personer att stå i samma ring som person A och $k!$ sätt att placera ut alla i ringen och att det finns

$(20-(k+2))!$ sätt att placera ut de kvarvarande. Så det finns $\binom{19}{k}k!\,(20-(k+2))! = 19!\,/(20-(k+1))$ vis att göra det på. Summerandes över k så får vi att svaret är

$$\sum_{k=0}^{18} \frac{19!}{20-(k+1)} = 431565146817638400.$$

6. a) Betrakta permutationerna $\pi = (123)(45)(67)$ och $\tau = (1457)(23)(68)$ i S_8. Skriv ner π^{-1} och $\pi\tau$ på cykelform. 2p

   b) Skriv $\gamma = (1245)(678)$ som en produkt av transpositioner. Är γ udda eller jämn? 1p

   c) Låt nu $\pi = (123)$ och $\gamma = (45678)$. Låt H vara delgruppen av S_8 genererad av

   $$\pi^{25}\gamma^7.$$

   Vad är indexet av H i S_8? (Kom ihåg att indexet definieras som antalet vänstra sidoklasser av H i S_8) 2p

Lösning: Vi börjar med att lösa a). Permutationen π^{-1} fås genom att läsa π baklänges: $\pi^{-1} = (321)(45)(67)$. Vi får att $\pi\tau = (156872)(3)(4)$.
För att skriva γ som en produktion av transpositioner så skriver vi $\gamma = (12)(24)(45)(67)(78)$. Vi har att γ är udda, vilket man ser direkt från γ skriven som en produkt av transpositioner (men detta kan också ses genom att titta på cykellängder).

För att lösa c) så noterar vi att π har ordning 3, γ har ordning 5, så att $\pi^{25}\gamma^7 = \pi\gamma^2$. Nu så är π och γ^2 två disjunkta cykler, där π har längd 3 och γ^2 har längd 5, har så ordningen av $\pi\gamma^2$ är precis 15. Således är kardinaliteten av delgruppen genererad av $\pi\gamma^2$ exakt 15. Av Lagranges sats har vi att $|S_8/H| = 8!\,/15$.