






Inga hjälpmedel tillåtna. Alla svar ska motiveras noga. Svaren får innehålla binomial- och multinomial-koefficienter, faktulteter, Stirlingtal, om inte annat anges. Varje uppgift är värd 5 poäng.

Uppgift 1. Svara på följande frågor—en mening räcker ofta som motivering.

- (a) Hur många surjektioner finns det från \mathbb{Z}_4 till \mathbb{Z}_3 ?
- (b) Är polynomet $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibelt?
- (c) Låt $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8) \in S_8$. Kan man hitta $\pi \in S_8$, så att $\pi^2\sigma\pi^{-2} = \text{id}$?
- (d) Har S_6 en delgrupp av storlek 37?
- (e) En linjär kod med 4 kodord innehåller 00000, 10110 och 01101. Var är det sista kodordet?

Uppgift 2. *Fischer random chess*—även kallat *Chess960*—är en variant av schack där de åtta pjäserna () placeras på första raden av brädet () slumpmässigt, men med följande två villkor:

- i. De två löparna () står på olikfärgade rutor,
- ii. Kungen () står placerad någonstans mellan de två tornen ()

Till exempel, så uppfyller  båda kraven.

- (a) Hur många konfigurationer finns om man inte tar hänsyn till något av villkoren?
- (b) Hur många konfigurationer finns om man bara tar hänsyn till det första villkoret?
- (c) Hur många konfigurationer finns där båda krav är uppfyllda? *Svara med heltal!*

Uppgift 3. Låt $G = \{x \in \mathbb{Z}_{20} : x^2 = 1\}$. Till exempel gäller det att $19 \in G$ eftersom $19^2 = 361$ och $361 = 1$ i \mathbb{Z}_{20} .

- (a) Visa att G är en grupp under multiplikation.
- (b) Bestäm alla element i G .
- (c) Är G cyklisk?
- (d) Beskriv en delgrupp av permutationer $H \subseteq S_4$, samt en isomorfi $\phi : G \rightarrow H$.

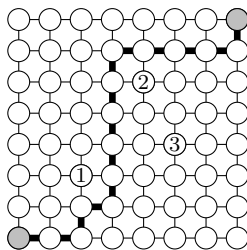
Du kan använda svaret på (b) för att lösa (a) om du vill.

Uppgift 4. (a) Rita en graf med kromatiskt tal 2 och där varje hörn har grad 4.

(b) Låt $\Gamma = (V, E)$ vara en graf. Vi kan tillverka en ny graf, Γ' , genom att låta dess hörnmängd vara $V \times \{-1, 1\}$, och två olika hörn $(v, \pm 1)$ och $(w, \pm 1)$ är grannar i Γ' exakt då antingen $\{v, w\} \in E$ eller $v = w$. Visa att om Γ har en Hamilton-stig, så har Γ' en Hamilton-cykel.

Du kan få delpoäng om du ritat Γ' , där Γ är grafen med hörnen $V = \{a, b, c\}$ och kanterna $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$.

Uppgift 5. En graf med 64 hörn visas nedan. Från det nedre vänstra hörnet, kan man gå 14 steg, uppåt och höger, tills man hamnar i det övre högra hörnet. En sådan stig visas i figuren.

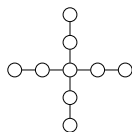


(a) Beräkna det totala antalet sådana stigar.

(b) Beräkna antalet stigar som passerar hörnet märkt 1.

(c) Beräkna antalet stigar som inte passerar något av hörnen märkt 1, 2 eller 3.

Uppgift 6. Låt Γ vara grafen nedan:



(a) Bestäm antalet färgläggningar av hörnen i Γ med 3 färger, så att grannar har olika färg.

(b) Låt X vara färgläggningar av hörnen i Γ med de tre färgerna $\{\text{vit}, \text{grå}, \text{svart}\}$, där grannar fortfarande inte har samma färg. Gruppen $G = \{e, r, r^2, r^3\}$ verkar på X genom att r roterar grafen 90° moturs. Bestäm antalet banor då G verkar på X , svara med ett heltal.