STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,
Examinator: P. Alexandersson

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
31 maj 2022 kl $08^{00} - 13^{00}$

Inga hjälpmedel tillåtna. Alla svar ska motiveras noga. Svaren får innehålla binomial- och multinomial-koefficienter, fakulteter, Stirlingtal, om inte annat anges. Varje uppgift är värd 5 poäng.

Uppgift 1. Svara på följande frågor—en mening räcker ofta som motivering.

(a) Hur många surjektioner finns det från $\mathbb{Z}_4$ till $\mathbb{Z}_3$?

(b) Är polynomet $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibelt?

(c) Låt $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8) \in \mathrm{S}_8$. Kan man hitta $\pi \in \mathrm{S}_8$, så att $\pi^2\sigma\pi^{-2} = \mathrm{id}$?

(d) Har S_6 en delgrupp av storlek 37?

(e) En linjär kod med 4 kodord innehåller `00000`, `10110` och `01101`. Var är det sista kodordet?

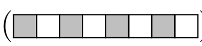
Lösning. (a) Det finns $3!S(4,3)$ surjektioner.

(b) Vi ser att $x = 1$ är en rot, så polynomet är reducibelt.

(c) Nej, id är en jämn permutation, men σ (och då även $\pi^2\sigma\pi^{-2}$) är udda. Alternativt: Om relationen ska gälla, måste speciellt $\pi^2\sigma\pi^{-2}$ och id ha samma typ. Men σ och $\pi^2\sigma\pi^{-2}$ är konjugerade, så de har samma typ. Men σ och id har inte samma typ. Det finns alltså inget sådant π.

(d) Nej, storleken av S_6 är inte delbart med 37, så Lagranges sats säger att det inte finns sådan delgrupp.

(e) Sista kodordet är `11011`, vilket är summan av de andra.

Uppgift 2. *Fischer random chess*—även kallat *Chess960*—är en variant av schack där de åtta pjäserna (♜,♜,♞,♞,♝,♝,♛,♚) placeras på första raden av brädet () slumpmässigt, men med följande två villkor:

i. De två löparna (♝) står på olikfärgade rutor,

ii. Kungen (♚) står placerad någonstans mellan de två tornen (♜).

Till exempel, så uppfyller ♝♜♛♚♞♜♞♝ båda kraven.

(a) Hur många konfigurationer finns om man inte tar hänsyn till något av villkoren?

(b) Hur många konfigurationer finns om man bara tar hänsyn till det första villkoret?

(c) Hur många konfigurationer finns där båda krav är uppfyllda? *Svara med heltal!*

Lösning. (a) Utan krav så blir det $\binom{8}{2,2,2,1,1} = \frac{8!}{2^3} = 7!$ olika konfigurationer.

(b) Det finns 4 sätt att placera ut ♝ på en mörk ruta, och 4 sätt att placera på en ljus ruta. Totala antalet blir då $4^2\binom{6}{2,2,1,1} = 4^2 \cdot \frac{8!}{2^2} = 4 \cdot 6!$.

(c) Vi placerar först ut de två löparna på två olikfärgade rutor, 4^2 sätt. Därefter väljer vi positionerna för ♞♞♛, $\binom{6}{2,1,3} = \frac{6!}{2 \cdot 3!}$ sätt. Det finns nu exakt ett sätt att placera ♜♚♜ på de tre återstående tomma rutorna, så att kungen är mellan tornen. Totalt får man $4^2 \cdot \frac{6!}{2 \cdot 3!} = 8 \cdot 5! = 8 \cdot 120 = 960$ olika konfigurationer.

Uppgift 3. Låt $G = \{x \in \mathbb{Z}_{20} : x^2 = 1\}$. Till exempel gäller det att $19 \in G$ eftersom $19^2 = 361$ och $361 = 1$ i $\mathbb{Z}_{20}$.

(a) Visa att G är en grupp under multiplikation.

(b) Bestäm alla element i G.

(c) Är G cyklisk?

(d) Beskriv en delgrupp av permutationer $H \subseteq \mathrm{S}_4$, samt en isomorfi $\phi : G \to H$.

Du kan använda svaret på (b) för att lösa (a) om du vill.

Lösning. (a) Vi har att $1 \in G$ (så neutralt element finns med), och om $x \in G$, gäller ju att $x^2 = 1$, så varje element är sin egen invers. Vidare, om $x, y \in G$ gäller det att $(xy)^2 = x^2y^2 = 1 \cdot 1$, så G är sluten under multiplikation. Allt detta ger nu att G är en grupp.

(b) Vi beräknar nu alla element i G. Vi behöver bara undersöka de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{20}$, dvs. de som är relativt prima med 20. Dessa är $\{1, 3, 7, 9, -9, -7, -3, -1\}$ (här väljer vi ibland negativa representanter då de är enklare att utföra beräkningar med). Bland dessa är det $\{1, 9, -9, -1\}$ som har egenskapen att deras kvadrat är 1, så $G = \{1, 9, -9, -1\}$.

(c) G är inte cyklisk eftersom det inte finns något element med ordning 4 i G.

(d) Vi kan ta permutationerna

$$H = \{(1)(2)(3)(4), \quad (1\,2)(3)(4), \quad (1)(2)(3\,4), \quad (1\,2)(3\,4)\},$$

och en möjlig isomorfi ges av

$$\phi(1) = (1)(2)(3)(4), \quad \phi(-1) = (1\,2)(3)(4), \quad \phi(9) = (1)(2)(3\,4), \quad \phi(-9) = (1\,2)(3\,4).$$

Uppgift 4. (a) Rita en graf med kromatiskt tal 2 och där varje hörn har grad 4.

(b) Låt $\Gamma = (V, E)$ vara en graf. Vi kan tillverka en ny graf, Γ', genom att låta dess hörnmängd vara $V \times \{-1, 1\}$, och två olika hörn $(v, \pm 1)$ och $(w, \pm 1)$ är grannar i Γ' exakt då antingen $\{v, w\} \in E$ eller $v = w$. Visa att om Γ har en Hamilton-stig, så har Γ' en Hamilton-cykel.

Du kan få delpoäng om du ritar Γ', där Γ är grafen med hörnen $V = \{a, b, c\}$ och kanterna $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$.

Lösning. (a) Man kan ta den kompletta bipartita grafen med $4+4$ hörn.

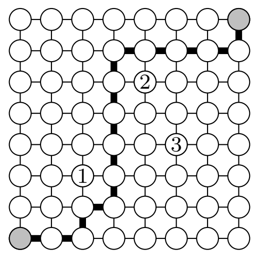
(b) Antag att Γ har Hamiltonstigen $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$.

Då är både $(v_1,-1) \to (v_2,-1) \to \cdots \to (v_n,-1)$ samt $(v_1,1) \to (v_2,1) \to \cdots \to (v_n,1)$ stigar i Γ'. Vi har dessutom att $\{(v_1,-1),(v_1,1)\}$ och $\{(v_n,-1),(v_n,1)\}$ är kanter i Γ', så de två stigarna ovan kan klistras samman, så att vi får att

$$\begin{array}{ccccccccc} (v_1,-1) & \to & (v_2,-1) & \to & (v_3,-1) & \to & \cdots & \to & (v_n,-1) \\ \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\ (v_1,\ \ 1) & \leftarrow & (v_2,\ \ 1) & \leftarrow & (v_3,\ \ 1) & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & (v_n,\ \ 1) \end{array}$$

är en Hamiltoncykel.

Uppgift 5. En graf med 64 hörn visas nedan. Från det nedre vänstra hörnet, kan man gå 14 steg, uppåt och höger, tills man hamnar i det övre högra hörnet. En sådan stig visas i figuren.



(a) Beräkna det totala antalet sådana stigar.

(b) Beräkna antalet stigar som passerar hörnet märkt 1.

(c) Beräkna antalet stigar som inte passerar något av hörnen märkt 1, 2 eller 3.

Lösning. (a) Det är totalt $7+7=14$ steg som ska göras, varav 7 är uppsteg. Svaret blir $\binom{14}{7}$.

(b) Med samma resonemang, antal stigar från start till 1 är $\binom{4}{2}$, och antal stigar från 1 till slutet är $\binom{10}{5}$. Dessa val är oberoende, så totalt $\binom{4}{2}\binom{10}{5}$.

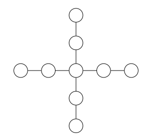
(c) Vi gör inklusion-exklusion, och räknar stigar som passerar 1, 2 eller 3. Samma resonemang som tidigare ger

Alla: $\binom{14}{7}$	Via 1: $\binom{4}{2}\binom{10}{5}$
Via 2: $\binom{9}{5}\binom{5}{2}$	Via 3: $\binom{8}{3}\binom{6}{4}$
Via 1 och 2: $\binom{4}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{2}$	Via 1 och 3: $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{6}{4}$
Via 2 och 3: finns inga	Via 1, 2 och 3: finns inga.

Som exempel, stigar som passerar både 1 och 2 består ju av tre oberoende delar, en stig från start till 1, en stig från 1 till 2, samt en stig från 2 till slutet. Inklusions-exklusionsformeln ger nu att det antal vi söker är

$$\binom{14}{7} - \binom{4}{2}\binom{10}{5} - \binom{9}{5}\binom{5}{2} - \binom{8}{3}\binom{6}{4} + \binom{4}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{6}{4} = 780.$$

Uppgift 6. Låt Γ vara grafen nedan:



(a) Bestäm antalet färgläggningar av hörnen i Γ med 3 färger, så att grannar har olika färg.

(b) Låt X vara färgläggningar av hörnen i Γ med de tre färgerna $\{\texttt{vit}, \texttt{grå}, \texttt{svart}\}$, där grannar fortfarande inte har samma färg. Gruppen $G = \{e, r, r^2, r^3\}$ verkar på X genom att r roterar grafen $90°$ moturs. Bestäm antalet banor då G verkar på X, *svara med ett heltal.*

Lösning. (a) Färgen på hörnet i mitten kan väljas på 3 sätt. Därefter väljer vi färgerna på grannarna till mitten, vilket ger 2^4 alternativ. Deras grannar har nu återigen 2^4 alternativ. Totalt antal färgläggningar blir då $3 \cdot 2^8$.

(b) Vi använder Burnsides lemma, och behöver då beräkna antalet fixpunkter för varje element i G.

e: Enligt formeln i a får vi $3 \cdot 2^8$ färgläggningar.

r: Färga mitten samt en gren, som bestämmer hela färgläggningen. Detta ger $3 \cdot 2^2$.

r^2: Färga mitten samt vänster och upp-grenen. Detta ger $3 \cdot 2^4$.

r^3: Samma som r, $3 \cdot 2^2$.

Med Burnsides lemma får vi nu

$$\frac{1}{4}\left(3 \cdot 256 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 3 \cdot 4\right) = 210$$

antal banor.