STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik
Föreläsare: P. Alexandersson
Examinator: S. Lundqvist

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
9 augusti 2023 kl $14^{00} - 19^{00}$

Enbart skrivdon tillåtna. Alla svar ska motiveras noga.

Uppgift 1. Svara på följande frågor.

(a) Bestäm ordningen för permutationen (1 5 2)(3 9)(4 6 8 7).

(b) Finn kvoten då $x^4 + 3x^3 + 2x + 4$ delas med $x^2 + 2$ som polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$.

(c) Hur många inverterbara element finns i ringen $\mathbb{Z}_{24}$?

Lösning. (a) Minsta gemensamma multipel av cykellängderna är 12, så detta är ordningen.

(b) Polynomdivision med liggande stolen ger

$$\begin{array}{l|l}
\underline{\quad x^2 + 3x + 3 \qquad\qquad} & \\
x^4 + 3x^3 + 2x + 4 & x^2 + 2 \\
\underline{-x^4 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} & \\
3x^3 + 3x^2 + 2x + 4 & \\
\underline{-3x^3 - 6x \qquad\quad} & \\
3x^2 + x + 4 & \\
\underline{-3x^2 - 6 \qquad} & \\
\quad x + 3 &
\end{array}$$

så kvoten är $x^2 + 3x + 3$.

(c) Alla tal i $\mathbb{Z}_{24}$ som är relativt prima med 24 är inverterbara. Dessa är 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 så 8 stycken.

Uppgift 2. En linjär kod $\mathcal{C}$ bestäms av checkmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hur många kodord innehåller $\mathcal{C}$?

(b) Vilka av orden `101`, `01110` och `10110` tillhör $\mathcal{C}$?

(c) Ordet `11111` har ett fel. Rätta detta.

Lösning. (a) De tre raderna är linjärt oberoende, så man behöver två parametrar. Alltså $2^2 = 4$ kodord.

(b) Det första har inte rätt längd ens. Matrismultiplikation ger att mittersta skickas på nollvektorn, och ingår alltså. Det tredje skickas inte på nollvektorn och ingår inte.

(c) Matrismultiplikation ger $(1,1,1)$, som är tredje kolonnen i matrisen. Alltså bör `11011` vara kodordet utan fel.

Uppgift 3. Betrakta alla ord som kan bildas genom att kasta om de 13 bokstäverna i ordet `"kökkenmödding"`. [1]

(a) Hur många ord totalt kan bildas?

(b) Hur många av orden innehåller `mödding` som delord?

(c) Hur många av orden innehåller `kök` som delord?

Svaren får innehålla binomialtal, multinomialtal och fakulteter.

Lösning. (a) Vi har $\binom{13}{3,2,2,2,1,1,1,1}$ som motsvarar `kkk`, `dd`, `nn`, `öö`, `e`, `g`, `i`, `m`.

(b) Detta blir $\binom{7}{3,1,1,1,1}$, då vi betraktar `mödding` som en "bokstav".

(c) Samma strategi igen, om vi låter `kök` vara ett tecken, får vi nästan $\binom{11}{2,2,1,1,1,1,1,1,1}$ antal ord. Problemet är att man dubbelräknar de orden som innehåller `kökök` (som `kök` `ö` `k` och som `k` `ö` `kök`) så dessa måste tas bort. Svaret blir då

$$\binom{11}{2,2,1,1,1,1,1,1,1} - \binom{9}{2,2,1,1,1,1,1}.$$

Vänligen vänd!

[1] Kökkenmödding betyder *avskrädeshög från nordens stenålder, bestående av lämningar från stenåldersfolkets måltider* — Svenska Akademiens ordbok

Uppgift 4. Låt X vara mängden som består av alla vektorer av längd 4, där talen i vektorerna kommer från mängden $\{-1, 0, 1\}$. Vi låter $\rho : X \to X$ beteckna cyklisk rotation av vektorn ett steg åt vänster, och vi låter $\epsilon : X \to X$ beteckna funktionen som skickar $\mathbf{v}$ på $-\mathbf{v}$.
Låt G vara gruppen som består av alla sammansättningar av ρ och ϵ; denna grupp G verkar på X.

(a) Skriv ned alla element i G.

(b) Finn två vektorer som finns i $\mathrm{Fix}(\epsilon\rho^2)$.

(c) Bestäm banan och stabilisatorn till vektorn $(1, -1, 1, -1) \in X$.

Lösning. (a) Då vi roterar 4 element, så gäller $\rho^4 = e$. Vidare, $\epsilon^2 = e$ samt $\rho\epsilon = \epsilon\rho$ då det inte spelar roll i vilken ordning vi negerar och roterar. Alltså är $G = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3, \epsilon, \epsilon\rho, \epsilon\rho^2, \epsilon\rho^3\}$.

(b) En vektor är $(0, 0, 0, 0)$ och en annan vektor är $(1, 1, -1, -1)$, då vi får tillbaka denna om man roterar två steg och sedan byter tecken.

(c) Banan är

$$\{(1, -1, 1, -1), (-1, 1, -1, 1)\}$$

då vi inte kan få något mer genom rotation eller teckenbyte. Stabilisatorn är $\{e, \epsilon\rho, \rho^2, \epsilon\rho^3\}$. Notera att banans storlek gånger stabilisatorns storlek blir $|G| = 8$, vilket Bana–stabilisator-satsen säger ska gälla.

Uppgift 5. (a) Bestäm alla delgrupper till $(\mathbb{Z}_{16}, +)$. Motivera att du har hittat alla.

(b) En ändlig grupp G uppfyller att alla dess delgrupper $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ligger inuti varandra. Det vill säga,

$$\{e\} = G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_k = G.$$

Visa att G är cyklisk.

Lösning. (a) Notera att $\mathbb{Z}_{16}$ är cyklisk, så varje delgrupp är cyklisk. Delgrupperna är

$$\{\mathbf{0}\}, \{0, \mathbf{8}\}, \{0, \mathbf{4}, 8, \mathbf{12}\}, \{0, \mathbf{2}, 4, \mathbf{6}, 8, \mathbf{10}, 12, \mathbf{14}\}, \{0, \mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, \ldots, 14, \mathbf{15}\} = \mathbb{Z}_{16},$$

där generatorerna markerats. Notera att varje tal i $\mathbb{Z}_{16}$ är en generator för någon grupp i listan ovan, så vi har inte missat någon delgrupp.

(b) Om $k = 1$ så måste $G = \{e\}$ som är cyklisk. Annars är $k \geq 2$ och vi kan betrakta element $g \in G_k \setminus G_{k-1}$. Elementet g genererar en delgrupp till G. Det kan inte vara någon av $G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}$ eftersom g ligger utanför alla dessa delgrupper. Alltså kan g bara generera G_k, som är hela gruppen. Alltså är G cyklisk då g är en generator.

Uppgift 6. Låt Γ vara grafen som definieras enligt följande. Noderna i Γ ges av alla sätt att partitionera talen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i exakt tre icke-tomma block. Noderna (partitionerna) u och v är grannar om u kan fås från v genom att ett element flyttas från ett block (innehållandes minst två element) i partitionen till ett annat block. Till exempel så är

$$\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}\} \text{ granne med både } \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\} \text{ och } \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$$

då vi flyttade elementet 3 från ett block till ett annat.

(a) Visa att varje hörn i Γ har 6 eller 8 grannar.

(b) Visa att Γ har en Eulerkrets.

Lösning. (a) Det finns två typer av hörn: de på formen $\{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$ samt de på formen $\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$. I hörnet av första typen så kan a, b eller c flyttas till samma block som d eller e. Detta ger 6 grannar. I hörn av typ 2, så kan någon av $\{a, b, c, d\}$ flyttas till något av de två andra blocken, vilket ger $4 \cdot 2 = 8$ grannar.

(b) Vi har att varje hörn har jämn grad, så det återstår att visa att Γ är sammanhängande. Det räcker att visa att alla hörn kan nå $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$ via en serie flytt. Detta sker på följande vis:

- Börja med ett hörn. Om 5 inte är ensamt, flytta övriga element till ett annat block.
- Gör nu 1 ensamt genom att flytta till övriga element till blocket som inte innehåller 5.
- Vi har nu nått $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$.

Alltså är grafen sammanhängande, och enligt (a) måste då en Eulerkrets finnas.