MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Samuel Lundkvist

Algebra och kombinatorik VT 2024
Tentamen 20 augusti 2024

- För godkänt är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen, inklusive bonuspoäng.
- *Samtliga svar måste motiveras utförligt!*
- *Ange hur många bonuspoäng du har uppnått!*
- Lärare kommer att besöka tentasalarna efter ungefär halva tentamenstiden.
- Lycka till!

**TENTAMEN**

1. Låt $G$ betyda den minsta delgrupp till $S_4$ som innehåller permutationerna $(23)$ och $(34)$.

   a) Ange ordningen av $G$ och beskriv explicit alla element i $G$. 2 p
   b) Bestäm alla delgrupper till $G$. 1 p
   c) Visa att det finns en bijektiv grupphomomorfi $G \to S_3$. 2 p

2. Låt $C$ vara koden $C := \{[7^k]_2,\ k = 1, 2, 3\}$, där $[x]_2$ står för det positiva heltalet $x$ uttryckt binärt. T ex $[5]_2 = 101 = 0101 = 00101 = 000101 = ...$(så vi fyller på med nollor initialt om det behövs för att jämföra två strängar).

   a) Hur många fel detekterar respektive rättar $C$? 2 p
   b) Visa att ekvationen $7^k - 7^l = \pm 2^m \pm 2^n$, där $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, samt $m > n$ och $k > l \geq 1$ inte har några lösningar. Ledning: vad är möjliga värden för $2^m$ modulo 7? 1 p
   c) Visa (med hjälp av b)) att koden $\tilde{C} := \{[7^k]_2,\ k = 1, 2, 3...100\}$ rättar lika många fel som $C$. 2 p

3. Låt $H$ vara en delgrupp till den ändliga gruppen $G$. Definiera två relationer $\cong_R$ och $\cong_L$ på $G$ på följande sätt:

$$x \cong_R y \iff y^{-1}x \in H \qquad x \cong_L y \iff xy^{-1} \in H.$$

a) Visa att bägge relationerna är ekvivalensrelationer(det räcker att ge detaljer för den ena). 2p

b) Visa att ekvivalensklasserna till de två relationerna är av formen $xH = \{xh,\ h \in H\}$, $x \in G$, respektive $Hx = \{hx,\ h \in H\}$, $x \in G$. 1p

c) Visa att om $|G| = 2|H|$ så gäller det att $x \cong_R y \iff x \cong_L y$. 2p

4. a) Hur många olika grafer på 10 hörn $v_1, ...v_{10}$ finns det? 1 p

   b) Ge exempel på en sammanhängande bipartit graf som har en Eulersk cykel, och en som inte har det. 2p

   c) Från ett av de sex hörnen i en regulär graf går fem kanter. Hur många kanter har grafen? Hur många sådana grafer finns det?2p

5. Låt $G$ beteckna symmetrigruppen till en regelunden 6-hörning med hörnen $V = \{v_1, ..., v_6\}$.

   a) Visa att $g(v, w) = (g(v), g(w))$ definierar en verkan av $G$ på $V \times V$. Beräkna, utan att använda Burnsides sats, antalet banor. 3p

   b) För varje element $g \in G$ beräkna fixpunkterna till $g$ under verkan i a) på $V \times V$. Använd sedan Burnsides sats för att verifiera din beräkning av antalet banor i a). 2p

6. Bestäm alla irreducibla polynom av formen $x^3 + x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}_3[x]$. 5p