

Enbart skrivdon tillåtna. Alla svar skall motiveras noga.

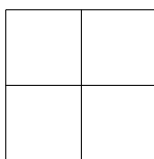
1. (a) Betrakta permutationerna $\pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ och $\sigma = (1\ 3\ 4)(2\ 7)$ i S_7 . (2p)
Beräkna $\tau = \pi\sigma$ och σ^{-1} (svara i cykelform), samt bestäm ordningen av τ .
(b) Hur många element i gruppen S_4 finns det som har ordning 3? (1p)
(c) Hur många delgrupper H till gruppen S_4 finns det som har ett udda antal element? (2p)
2. (a) Alice har en RSA-kod med $n = 143$ och $e = 103$. Eva har snappat upp ett krypterat meddelande $c = 3$ som skickats till Alice. Bestäm dekrypteringsnyckeln d och dekryptera meddelandet. (3p)
(b) Ange en checkmatris för den linjära kod som består av de två kodorden 00000 och 10101. (2p)
3. (a) Faktorisera polynomet $p(x) = x^5 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ i irreducibla faktorer. (3p)
(b) Bestäm alla irreducibla moniska andragradspolynom (2p)
$$f(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}_3[x].$$
4. (a) De tre grupperna $U(\mathbb{Z}_5)$, $U(\mathbb{Z}_8)$ och $U(\mathbb{Z}_{10})$ har 4 element vardera. Avgör vilka av dessa grupper som är isomorfa med varandra och vilka som inte är det. (3p)
(b) Rita två icke-isomorfa sammanhängande grafer som vardera har 5 noder och kromatiskt tal 2, men som inte är träd. (2p)

5. (a) Hur många heltalslösningar finns det till ekvationen (2p)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2025$$

där $x_i \geq i$ för $i = 1, 2, 3, 4$?. Svaret kan innehålla kombinatoriska uttryck.

- (b) Man har n stycken olika färger och skall färglägga de 4 delkvadraterna (3p)
i följande figur:



Det finns inga krav på att rutor måste målas med olika färger. Två färgläggningar betraktas som lika om man kan få den ena från den andra genom att rotera figuren. Bestäm en formel för antalet olika färgläggningar.

6. För $a \in \mathbb{Q}$ bildar $R_a = \left\{ \begin{pmatrix} x & ay \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q} \right\}$ en kommutativ ring under vanliga matrisoperationer (behöver inte visas).

- (a) Visa att R_0 och R_4 inte är kroppar. (3p)
- (b) Visa att R_3 är en kropp. (2p)