STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
22 oktober 2021

Lösningar

22 oktober 2021

Uppgift 1

Rätt svar är

a) C kan inte uttryckas med hjälp av A och B på något enkelt sätt

b) 4!3!6!3!

c) $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

d) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ men man kan inte avgöra om X och Y är oberoende.

e) $F_{max}(2) = 2^{-10}$

Uppgift 2

a) $\mathrm{P}(\text{ingen av } A \text{ och } B \text{ inträffar}) = 1 - \mathrm{P}(\text{ngn av } A \text{ och } B \text{ inträffar}) = 0.68$.

b) Sökt sannolikhet: $\mathrm{P}(A \cap B)$. Eftersom $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$ så fås att $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0.25 + 0.12 - 0.32 = 0.05$.

c) Sökt sannolikhet: $\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0.32 - 0.05 = 0.27$.

Uppgift 3

a) $p(0) = 1 - (p(1) + p(2) + p(3)) = 0.1$

b) $P(X \geq 1) = p(2) + p(3) = 0.7$

c) $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{3} ip(i) = 2$

d) $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{i=0}^{3} i^2 p(i) - 2^2 = 5 - 4 = 1$

Uppgift 4

a) Låt X_i beteckna längden hos den i :te trådbiten och skriv $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Vi söker $\mathrm{P}(S < 1600)$. Eftersom längderna antas vara oberoende och 100 är ett stort antal så har vi enligt centrala gränsvärdessatsen att S är approximativt normalfördelad med $\mathbb{E}[S] = 100 \cdot 15.9 = 1590$ och $\mathrm{Var}(S) = 100 \cdot 0.5^2 = 25$. Vi får:

$$\mathrm{P}(S \leq 1600) \approx \Phi\left(\frac{1600 - 1590}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(2) = 0.9772.$$

b) Vi söker nu n så att $\mathrm{P}(S \leq n) = 0.999$. Enligt ovanstående approximation ges n av

$$\frac{n - 1590}{\sqrt{25}} = \lambda_{0.001} = 3.0902$$

dvs $n = 1590 + 3.0902 \cdot \sqrt{25} = 1605.451$. Metalltråden måste alltså vara 1605.5 mm lång.

Uppgift 5

Låt X vara antalet vita bollar i lådan. Då gäller att $X \sim \mathrm{Bin}(5, 0.5)$. Låt Y vara antalet gånger som en vit boll dras. Vi har:

$$\begin{aligned}
P(X = 5|Y = 5) &= \frac{P(X = 5 \cap Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{P(Y = 5|X = 5)P(X = 5)}{P(Y = 5)} \\
&= \frac{P(Y = 5|X = 5)P(X = 5)}{\sum_{i=0}^{5} P(Y = 5|X = i)P(X = i)} \\
&= \frac{1 \cdot (0.5)^5}{\sum_{i=0}^{5} (i/5)^5 \binom{5}{i} (0.5)^5} = 0.284
\end{aligned}$$

Uppgift 6

a) Låt X ange avståndet från origo till den valda punkten. Då gäller att X är likformigt fördelad på [0,2]. Rektangelns sidor får längd X respektive $2-X$ och arean blir $X(2-X)$. De värden på X som gör att arean blir mindre än 0.5 fås genom att lösa ekvationen $x(2-x) = 0.5$, vilken har lösningarna $1 \pm 1/\sqrt{2} \approx 1 \pm 0.707$. Det gäller därför att arean är mindre än 0.5 för $X < 0.293$ och för $X > 1.707$. Täthetsfunktionen för X ges av $f(x) = 1/2$ för $x \in (0, 2)$ och $f(x) = 0$ annars. Den del av intervallet som medför att arean blir mindre än 0.5 har längd $0.293 + (2 - 1.707) = 2 \cdot 0.293$ och den sökta sannolikheten blir därför 0.293.

b) Vi har att

$$\mathrm{Cov}(X(2-X), X) = 2\mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X^2, X) = 2\mathrm{V}(X) - \mathbb{E}[X^3] + \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X].$$

Här är $\mathbb{E}[X] = 1$, $\mathrm{V}(X) = 1/3$ och $\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = 4/3$. Vidare får vi att $\mathbb{E}[X^3] = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = 2$, vilket gör att den sökta kovariansen blir 0.