STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
26 november 2021

Lösningar

26 november 2021

Uppgift 1

Rätt svar är

a) alltid falskt

b) $\mathbb{E}[X^2] = 115$

c) $2\sqrt{2\pi}$

d) X_1 och X_2 är oberoende men Y_1 och Y_2 är inte oberoende

e) $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq -23$

Uppgift 2

Låt A_i beteckna händelsen att en slumpvis vald fågel är av art i $(i = 1, 2, 3)$ och R händelsen fågeln är ringmärkt.

a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(R|A_i)\mathbb{P}(A_i) = 0.1 \cdot 0.45 + 0.15 \cdot 0.38 + 0.5 \cdot 0.17 = 0.187.$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathbb{P}(A_2|R^c) = \frac{\mathbb{P}(R^c|A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(R^c)} = \frac{0.85 \cdot 0.38}{1 - 0.187} = 0.397.$$

Uppgift 3

a) Villkoret $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ger $c\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = c/2 = 1$ och alltså $c = 2$.

b) $\mathbb{P}(X \geq 1) = \int_1^{\infty} 2e^{-2x}dx = [-e^{-2x}]_1^{\infty} = e^{-2}$.

c) Fördelningsfunktionen ges av $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. För $x \geq 0$ har vi att $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x 2e^{-2t}dt = 1 - e^{-2x}$ och för $x < 0$ gäller att $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$. Alltså:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{om } x \geq 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Uppgift 4

a) Sannolikheten att en vinnare utses i en given omgång ges av

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(n-1 \text{ personer får samma utfall och en får ett annat utfall}) \\ = \; & n \cdot \mathbb{P}(\text{person 1 får krona och alla andra klave eller tvärtom}) \\ = \; & 2n \cdot \mathbb{P}(\text{person 1 får krona och alla andra klave}) \\ = \; & 2n \cdot \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \tfrac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Antalet omgångar X som krävs är ffg-fördelat med denna parameter och den sökta sannolikheten blir alltså

$$\mathbb{P}(X = m) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{m-1} \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{för } m = 1, 2, \ldots.$$

b) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n/2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{n} = \frac{2^9}{10} = 51.2$ då $n = 10$.

Uppgift 5

Låt X_i beteckna livslängden hos den $i$te komponenten och låt $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ beteckna den sanna förväntade livslängden. Definiera $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Vi använder genomsnittet $\bar{X} = S_{250}/250$ för att uppskatta μ. Vi har att $\mathbb{E}[S_{250}] = 250\mu$ och $\mathrm{Var}(S_{250}) = 250 \cdot 40^2$, så att $\mathrm{SD}(S_{250}) = \sqrt{250} \cdot 40$. Vidare är S_{250} approximativt normalfördelad enligt Centrala gränsvärdessatsen, eftersom det är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler. Den sökta sannolikheten blir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\mu - 5 \leq \bar{X} \leq \mu + 5\right) &= \mathbb{P}\left(-5 \leq \bar{X} - \mu \leq 5\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-5 \cdot \frac{\sqrt{250}}{400} \leq \frac{S_{250} - 250\mu}{40\sqrt{250}} \leq 5 \cdot \frac{\sqrt{250}}{40}\right) \\ &\overset{CGS}{\approx} \Phi(1.98) - \Phi(-1.98) = 2\Phi(1.98) - 1 = 0.952. \end{aligned}$$

Uppgift 6

Låt $Z = X/Y$. För $z \geq 0$ ges fördelningsfunktionen för Z av

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X/Y \leq z) = \mathbb{P}(X \leq zY) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{zy} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} = \ldots = \frac{z\lambda_1}{\lambda_2 + z\lambda_1}, \end{aligned}$$

och täthetsfunktionen blir

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 + z\lambda_1)^2}.$$

För $z < 0$ gäller att $f_Z(z) = 0$.