| | |
|---|---|
| STOCKHOLMS UNIVERSITET | MT 3001 |
| MATEMATISKA INSTITUTIONEN | TENTAMEN |
| Avd. Matematisk statistik | 19 augusti 2022 |

# Tentamen i Sannolikhetsteori I

# 19 augusti 2022 kl. 14–19

*Examinator:* Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
*Tillåtna hjälpmedel:* Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
*Återlämning:* Tentaresultatet läggs in i ladok senast 29 augusti.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras.

## Basdel

### Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

**a)** Det gäller alltid att $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \cap E^c)$. Vilket av sannolikhetsaxiomen behöver man för att visa det?

1. $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ om $A_1, A_2, \ldots$ är parvis disjunkta
2. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för alla $A \subset S$
3. $\mathbb{P}(S) = 1$

**b)** Vilken av dessa funktioner är en täthetsfunktion?

1. $f(x) = x$ om $x \in [0, \sqrt{2}]$, och $f(x) = 0$ annars.
2. $f(x) = x$ om $x \geq 0$, och $f(x) = 0$ annars.
3. $f(x) = x$ om $x \in [0, 1]$, och $f(x) = 0$ annars.
4. $f(x) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

**c)** En försöksgrupp i ett läkemedelstest består av 50 personer varav 20 är rökare. Ur gruppen väljs slumpmässigt 25 personer ut för att testa ett nytt preparat mot högt blodtryck. Låt $X$ beteckna antalet rökare i den utvalda gruppen. Vad gäller?

1. $X$ är binomialfördelad med väntevärde 15.
2. $X$ är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 10.
3. $X$ är binomialfördelad med väntevärde 10.
4. $X$ är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 15.

**d)** Låt $X$ vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9 och låt $\Phi$ vara fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen. Då gäller:

1. $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5)$
2. $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 2\Phi(0.5) - 1$
3. $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$
4. $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = \Phi(0.5)$

**e)** Låt $X$ och $Y$ vara två stokastiska variabler med $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = \mu$. Låt $\mathrm{Cov}(X, Y)$ beteckna kovariansen mellan $X$ och $Y$. Vad är sant?

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq \mu^2$
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mu^2$
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) \leq \mu^2$
4. Man kan inte dra några slutsatser om $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

## Uppgift 2

Anna har 8 vita, 12 gråa och 28 svarta strumpor i en låda. Varje morgon tar hon två stycken på måfå ur lådan.

**a)** Vad är sannolikheten att de två strumporna har samma färg?

**b)** Om hon får två strumpor av samma färg, vad är sannolikheten att de är vita?

## Uppgift 3

Låt $(X, Y)$ vara en tvådimensionell diskret stokastisk variabel med simultan sannolikhetsfunktion

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} c & \text{om } i = j = 1; \\ 2c & \text{om } i = j = 2; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där $c$ är en konstant.

**a)** Bestäm $c$.

**b)** Bestäm de marginella sannolikhetsfunktionerna för $X$ och $Y$.

**c)** Avgör om $X$ och $Y$ är oberoende.

# Svårare del

## Uppgift 4

Låt $X$ och $Y$ vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde $1/\lambda$.

**a)** Bestäm täthetsfunktionen för $2X$.

**b)** Bestäm täthetsfunktionen för $X + Y$.

## Uppgift 5

Vid projektering av ett bostadsområde med 1000 hushåll försöker man dimensionera antalet parkeringplatser på följande sätt. Man antar att antalet bilar i olika hushåll är oberoende. Vidare antar man att sannolikheten att ett hushåll inte har någon bil är 0.2, sannolikheten att hushållet har en bil är 0.7 och sannolikheten att hushållet har två bilar är 0.1. Man beslutar att bygga så många P-platser att sannolikheten att alla bilar får plats är 0.99. Hur många P-platser måste man bygga?

## Uppgift 6

På en 3 km lång vägsträcka med hastighetsbegränsning 90 km/h har man mätt bilarnas hastighet och funnit att den kan anses vara en stokastisk variabel med väntevärde 100 km/h och standardavvikelse 5 km/h. Låt $T$ beteckna den tid det tar för en bil att avverka vägsträckan. Beräkna approximativt väntevärde och standardavvikelse för $T$.

*Lycka till!*