STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
26 oktober 2022

Tentamen i Sannolikhetsteori I

26 oktober 2022 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentaresultatet läggs in i ladok senast 4 november.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Ett mynt kastas 40 gånger. Låt A vara händelsen att det blir klave i alla de 10 sista kasten och låt B vara händelsen att det blir klave i alla kast som är delbara med 5 (dvs kast nummer 5, 10, 15 etc). Vad är sant?

1. $P(A) > P(B)$
2. $P(A) = P(B)$
3. $P(A) < P(B)$

b) I epidemimodellering antar man ofta att en smittad individ som anländer till en mottaglig population med n individer smittar ner var och en av de mottagliga individerna oberoende med sannolikhet c/n, där c är en positiv konstant. Under detta antagande, vad har antalet individer som smittas av den initiala individen för fördelning i en rimlig och hanterbar sannolikhetsteoretisk modell om vi antar att n är mycket stort?

1. Binomial(n, c)
2. Poisson(c)
3. Negativ binomial
4. Geometrisk(c/n)

c) Låt X vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9, och låt Φ vara fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen $N(0,1)$. Då gäller:

1. $\mathbb{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$
2. $\mathbb{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2 - 2\Phi(1.5)$
3. $\mathbb{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2\Phi(0.5) - 1$
4. $\mathbb{P}(|X-2| \geq 4.5) = 2\Phi(1.5) - 1$

d) Låt (X,Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel. Påstående: Om A och B är två områden i (x,y)-planet med samma area, så gäller alltid att $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \mathbb{P}((X,Y) \in B)$. Påståendet är:

1. falskt
2. sant

e) Om $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ och $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ är oberoende så är $X+Y$

1. $\text{Po}(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})$
2. $\text{Po}(\lambda_1 \lambda_2)$
3. $\text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$
4. bara Poissonfördelad om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Då gäller att $X + Y \sim \text{Po}(\lambda/2)$.

Uppgift 2

I en viss population är 10% vänsterhänta. Sannolikheten att en vänsterhänt person har sitt språkcentrum i vänster hjärnhalva är 70%, medan sannolikheten att en högerhänt person har sitt språkcentrum i vänster hjärnhalva är 95%.

a) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald person har sitt språkcentrum i vänster hjärnhalva.

b) Beräkna sannolikheten att en person med språkcentrum i vänster hjärnhalva är vänsterhänt.

Uppgift 3

Låt X vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4} & \text{om } x \geq 1; \\ 0 & \text{om } x < 1. \end{cases}$$

a) Bestäm c.

b) Ange fördelningsfunktionen för X.

b) Beräkna $\mathbf{E}[X]$ och $\text{Var}(X)$.

Svårare del

Uppgift 4

En roddare uppskattar att längden hon kommer på ett årtag (mätt i meter) är en stokastisk variabel med väntevärde 9 och varians 9. Antag att det inte finns några samband mellan längden på olika årtag.

a) Bestäm sannolikheten att roddaren klarar att ro 3000 meter (vilket motsvarar hela Brunnsviken) på 325 årtag.

b) Bestäm n så att sannolikheten att roddaren klarar att ro 3000 meter på n årtag är 95%.

Uppgift 5

Som ett mått på beroendet mellan två händelser A och B kan man använda Ber(A, B)= $\rho(X, Y)$, där $\rho(X, Y)$ är korrelationskoefficienten mellan de två stokastiska variablerna X och Y definierade så att $X = 1$ om A inträffar och $X = 0$ annars, och $Y = 1$ om B inträffar och $Y = 0$ annars.

a) Uttryck Ber(A, B) med hjälp av $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ etc.

b) Beräkna Ber(A, B) i de fyra fallen (i) $B = A$, (ii) $B = A^c$, (iii) A och B är oberoende, (iv) $A \cap B = \emptyset$.

Uppgift 6

En vanlig kortlek innehåller 52 kort uppdelade i fyra färger. I varje färg finns valörerna Ess, 2, ..., 10, Knekt, Dam, Kung. Man drar en hand med 13 kort på måfå utan återläggning.

a) Vad är sannolikheten att en given valör (tex ess) finns representerad i handen (dvs att det finns minst ett ess med i handen)?

b) Beräkna det förväntade antalet valörer som finns representerade i handen.

Tips: Resultatet från a) kan vara till hjälp för att lösa b).

Lycka till!