STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
14 december 2022

Tentamen i Sannolikhetsteori I

14 december 2022 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentaresultatet läggs in i ladok senast 22 december.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) En symmetrisk tärning kastas upprepade gånger. Låt A vara händelsen 'Det sjätte kastet blir en sexa' och B händelsen 'Första gången vi får en sexa är i sjätte kastet'. Vad är sant?

1. $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$

b) Antag att händelserna E och F är disjunkta och att $P(E) > 0$ och $P(F) > 0$. Påståendet 'E och F är oberoende' är

1. möjligtvis sant
2. alltid falskt
3. alltid sant

c) Låt X vara en heltalsvärd stokastisk variabel med fördelningsfunktion $F(x)$. Vad gäller alltid?

1. $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \leq x} F(y)$
2. $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y > x} F(y)$
3. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x - 1)$
4. $\mathbb{P}(X = x) = F(x + 1) - F(x)$

d) Antag att $X \sim N(2, 4)$ och låt $Y = aX + b$. Hur ska a och b väljas för att $Y \sim N(0, 1)$?

1. $a = 1/2$ och $b = -1$
2. $a = 1/4$ och $b = -1$
3. $a = 1/2$ och $b = -2$
4. $a = 1/4$ och $b = -2$

e) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$ och $\text{Var}(X + Y) = 2\sigma^2$. Vad är sant?

1. Man kan inte avgöra om X och Y är oberoende och inte heller om $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
2. X och Y är oberoende, men man kan inte avgöra om $\text{Cov}(X, Y) = 0$ eller inte.
3. $\text{Cov}(X, Y) \geq 5$
4. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ och X och Y är oberoende.
5. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ men man kan inte avgöra om X och Y är oberoende.

Uppgift 2

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med simultan täthetsfunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{om } 0 < x < 2, 0 < y < 2; \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där c är en konstant.

a) Bestäm konstanten c.

b) Bestäm de marginella sannolikhetsfunktionerna.

c) Beräkna väntevärdet för $X + Y$.

Uppgift 3

Antag att tre symmetriska sexsidiga tärningar kastas. Alla tärningar har tre röda, två gula och en grön sida.

a) Beräkna sannolikheten att alla tärningar visar samma färg.

b) Beräkna sannolikheten att alla tärningar visar olika färg.

Svårare del

Uppgift 4

Låt X vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{om } x \geq 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm täthetsfunktionen för X^2.

b) Låt X_1 och X_2 vara oberoende, båda med samma fördelning som X. Bestäm täthetsfunktionen för $X_1^2 + X_2^2$.

Uppgift 5

Ett flygbolag uppskattar att sannolikheten att en person med biljett inte dyker upp till flyget är 0.05. Man säljer därför fler biljetter än de 300 platser som finns på planet. Hur många biljetter kan bolaget som mest sälja om sannolikheten att alla passagerare får plats ska vara större än 0.99 enligt flygbolagets uppskattningar, om man antar att det inte finns några samband mellan olika personers benägenhet att dyka upp till flyget?

Uppgift 6

Innan vi vet utfallet av den stokastiska variablen X ska vi gissa vad det kommer att bli. Ju mer fel vi gissar, desto större förlust kommer vi att göra. Om vi gissar på talet a och variabeln utfaller med värdet x så blir vår förlust $(x-a)^2$.

a) Visa att den förväntade förlusten minimieras för $a = \mathbf{E}[X]$.

b) Antag nu att förlusten inte är $(x-a)^2$, utan istället $|x-a|$. Visa att den förväntade förlusten minimeras om a väljs som medianen i fördelningen. Det räcker att behandla fallet då X är kontinuerlig.

Lycka till!