

MT3001 – Sannolikhetsteori I – tentamen

Datum Onsdag 25 oktober, 2023

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.

Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. I följande flervalsfrågor finns ett rätt svar per fråga. Ange vilket. Motivering krävs ej.

- (a) Låt X vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9, och låt Φ beteckna fördelningsfunktionen för en standard normalfördelning. Avgör vilket av följande som gäller:

(i) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5)$,

(ii) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 2\Phi(0.5) - 1$,

(iii) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$,

(iv) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = \Phi(0.5)$.

- (b) Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = x + y$ för $x \in [0, 1]$ och $y \in [0, 1]$. Vilket av följande gäller?

(i) $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$,

(ii) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$,

(iii) $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$.

Uppgift 2. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion på formen $f_X(x) = c(1 - x^2)$ för $-1 \leq x \leq 1$, och som är noll i övrigt.

- (a) Bestäm c så att ovanstående är en täthetsfunktion.

- (b) Bestäm $\mathbb{E}[X]$ och $\text{Var}(X)$.

Uppgift 3. Ägaren till en butik uppskattar att 1% utav alla kunder i butiken stjälar, samt att utav de som stjälar från butiken så bär 90% mössa, medan bara 10% utav hederliga kunder bär mössa.

- (a) Vad är sannolikheten att en på måfå vald kund bär mössa?
- (b) Vad är sannolikheten att en på måfå vald kund som bär mössa är tjuv?

Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Beskriv variablerna *slumptal* och *stand*, samt ange vilket histogram som motsvarar plot 1 respektive plot 2.

```
set.seed(420)

n <- 1200

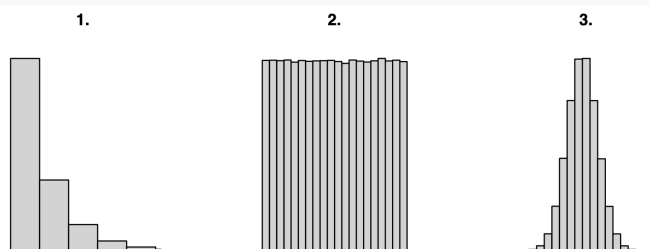
slumptal <- matrix(runif(n^2, min = 7, max = 18), nrow = n, ncol = n)

E <- (7+18)/2
D <- (18-7)/sqrt(12)

hist(slumptal) # Plot 1

stand <- (colSums(slumptal) - n*E)/(D * sqrt(n))

hist(stand) # Plot 2
```



Betygsdel

Uppgift 5. Glödlampor från ett visst fabrikat kan anses ha en livslängd (mätt i timmar) som följer en exponentialfördelning med väntevärde 10 000. En person installerar 10 sådana lampor, vars livslängd kan antas vara oberoende av varandra. Låt T ange tiden tills dess att första lampan behöver bytas.

- (a) Beräkna väntevärdet av T .
- (b) Beräkna sannolikheten att samtliga lampor lyser efter 5 000 timmar.

Uppgift 6. Ett nytt bostadsområde med 3000 hushåll planeras i utkanten av en kommun. Sannolikheterna att ett hushåll har noll, ett, två eller tre barn i skolåldern antas vara 0.20, 0.45, 0.25 respektive 0.10, och antalet barn i olika hushåll antas vara oberoende av varandra.

- (a) Bestäm väntevärde och varians för antalet barn i ett hushåll.
- (b) Uppskatta hur många skolplatser som behöver planeras för att sannolikheten att alla barn skall få plats inte ska understiga 95%.

Uppgift 7. En vanlig kortlek innehåller 52 kort fördelade på fyra färger. I var färg finns kort i valörerna $2, 3, \dots, 10$, knekt, dam, kung, ess. I spelet Poker så delas fem kort (kallad en *hand*) ut till vardera spelare.

- (a) Var är sannolikheten att en spelare erhåller en hand med samtliga kort i samma färg?
- (b) Vad är sannolikheten att en spelare erhåller en hand med två par?

Uppgift 8. En pinne av längd 1 meter kapas i två delar på en likformligt fördelad slumpmässigt vald punkt X . De två delarna används för att rita en rektangel, vars sidors längder alltså utgörs av de två delarnas längder.

- (a) Beräkna förväntad area av rektangeln.
- (b) Beräkna kovariansen mellan sidlängden X och arean A av rektangeln.