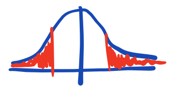
Sannolikhetsteori I lösningar tenta 2023-10-25

Basdel

1 (a) $X \sim N(2,9) \Rightarrow \frac{X-2}{3} \sim N(0,1)$



$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \le 0{,}5) = \mathbb{P}\left(\frac{X-2}{3} \le -\frac{1{,}5}{3}\right) = \Phi(-0{,}5)$$
$$= 1 - \Phi(0{,}5)$$

Svar (i)

(b) På grund av symmetri så har X och Y samma fördelning och därmed samma väntevärde.

Svar (ii)

5p

2 (a) Då en täthetsfunktion integrerar till 1 får vi

$$1 = \int_{-1}^{1} c(1-x^2)\,dx = c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = c\,\frac{4}{3}$$

vilket ger $c = \frac{3}{4}$.

2p

(b) Då X kontinuerlig gäller

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x c(1-x^2)\,dx = c\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 c(1-x^2)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 2c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$
$$= 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{15} = \frac{16}{45},$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{16}{45}.$$

3p

3 Tag en person på måfå och låt

$M = \{$person bär mössa$\}$.

$T = \{$person är tjuv$\}$.

Då gäller

$\mathbb{P}(T) = 0{,}01$ $\quad \mathbb{P}(M \mid T) = 0{,}9$ $\quad \mathbb{P}(M \mid T^c) = 0{,}1$ 1p

(a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M \mid T)\cdot\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(M \mid T^c)\cdot\mathbb{P}(T^c) = 0.9\cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99$$
$$= 0{,}108.$$

2p

(b) Med Bayes sats / betingning får vi

$$\mathbb{P}(T \mid M) = \frac{\mathbb{P}(T \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M \mid T)\cdot\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0.9 \cdot 0.01}{0{,}108} \approx 0.083$$

2p

4 Variabeln slumptal är en 1200×1200 matris som innehåller slumptal genererade från en likformig fördelning på $[7, 18]$.

Variabeln stand genereras från slumptal genom att summera kolonnerna av matrisen, subtrahera med väntevärdet, samt dividera med standardavvikelsen. Resultatet är därmed en vektor av dimension 1200, vars element är approximativt normalfördelade enl. Centrala gränsvärdessatsen. 3p

Plot 1 illustrerar slumptal och ses i figur 2.
Plot 2 illustrerar stand och ses i figur 3. 2p

Betygsdel

5 Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ ange livslängd för glödlamporna. Då är de oberoende $\exp(1/10000)$-fördelade.

$$T = \min\{X_1, \ldots, X_{10}\}$$

är på nytt exp-fördelad där intensiteterna (parametrarna) summeras. Dvs $T \sim \exp(10/10000)$. 4p

(a) Från tabell gäller

$$\mathbb{E}[T] = \frac{10\,000}{10} = 1000 \quad \text{timmar.}$$ 3p

(b) Vi söker

$$P(T > 5000) = 1 - F_T(5000) = e^{-5000/1000}$$
$$= e^{-5} \approx 0.0067$$ 3p

6 (a) Antalet barn X i ett hushåll har sannolikhetsfunktion

$$p_X(0) = 0.20 \quad p_X(1) = 0.45 \quad p_X(2) = 0.25 \quad p_X(3) = 0.1.$$

Detta ger

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} k \cdot p_X(k) = 0.45 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.1 = 1.25.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \geq 1} k^2 p_X(k) = 0.45 + 4 \cdot 0.25 + 9 \cdot 0.1 = 2.35.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2.35 - 1.25^2 = 0.7875.$$ 4p

(b) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{3000}$ ange antalet barn i de 3000 hushåll som planeras. Enl. centrala gränsvärdessatsen kommer

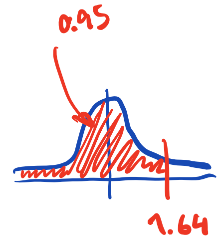
$$Z = \frac{1}{\sqrt{3000}} \sum_{k=1}^{3000} \frac{X_k - 1.25}{\sqrt{0.7875}}$$ 2p

vara approx $N(0,1)$-fördelad.

Vi söker m så att

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{3000} X_k \leq m \right) = 0.95.$$

Detta ger



$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{m - 1.25 \cdot 3000}{\sqrt{0.7875}\sqrt{3000}} \right) = 0.95.$$

Enligt tabell gäller $\Phi(1.64) \approx 0.95$.

Det ger

$$1.64 \approx \frac{m - 1.25 \cdot 3000}{\sqrt{0.7875} \cdot \sqrt{3000}}$$ 4p

dvs

$$m \approx 1.25 \cdot 3000 + 1.64\sqrt{0.7875} \cdot \sqrt{3000} \approx 3829{,}7.$$

De bör alltså planera 3830 skolplatser.

$\boxed{7}$ (a) Då var hand kan anses lika sannolik så gäller

$$\mathbb{P}(\text{samma färg}) = \frac{\#\text{ händer i samma färg}}{\#\text{ händer totalt}}$$ 2p

Det totala antalet händer är $\binom{52}{5}$. 2p

Antalet händer med samtliga kort i samma färg är

$$\binom{4}{1}\binom{13}{5}$$

där den första faktorn anger antalet val av färg och andra anger antalet kombinationer av fem kort av de 13 av den färgen.

Vi får

$$\mathbb{P}(\text{samma färg}) = \frac{4 \cdot \frac{13!}{5!\,8!}}{\frac{52!}{5!\,47!}} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0.00198$$ 3p

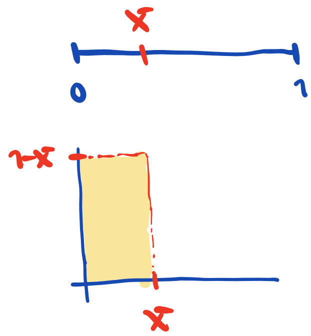
(b) Antalet händer som ger två par är

$$\underbrace{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}_{\substack{\text{val av}\\ \text{två par}}}\underbrace{\binom{11}{1}\binom{4}{1}}_{\substack{\text{val av}\\ \text{femte kort}}}$$

Som tidigare får vi 3p

$$\mathbb{P}(\text{två par}) = \frac{13\cdot 6\cdot 6\cdot 11\cdot 4}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \approx 0.0475.$$

$\boxed{8}$ (a) Låt X ange avstånd från pinnens vänstra ände till brytpunkten. De två stumparna har därmed längd X och $1-X$, där $X \sim \text{Likf}[0,1]$. 3p



Rektangelns area ges av

$$A = X\cdot(1-X).$$

Vi får

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[X(1-X)] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X^2]$$

$$\mathbb{E}[X] = 1/2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1/3$$ 3p

vilket ger $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1/6.$

(b) Vi har att kovariansen ges av

$$\mathrm{Cov}(X,A) = \mathbb{E}[XA] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[A]$$

$$= \mathbb{E}[X^2(1-X)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[A]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[A]$$

$$\mathbb{E}[X^3] = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1/4.$$ 4p

Vi får därmed

$$\mathrm{Cov}(X,A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0.$$

Sidlängden och arean är därmed okorrelerade.