MT3001 – Sannolikhetsteori I – tentamen

Datum Fredag 1 december, 2023
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.
Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. I följande flervalsfrågor finns ett rätt svar per fråga. Ange vilket. Motivering krävs ej för denna uppgift.

(a) En försöksgrupp i ett läkemedelstest består av 50 personer, varav 20 är rökare. Ur gruppen väljs slumpmässigt 25 personer ut för att testa ett nytt preparat mot högt blodtryck. Låt X beteckna antalet rökare i den utvalda gruppen. Vilket av följande gäller?

- (i) X är binomialfördelad med väntevärde 15.
- (ii) X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 10.
- (iii) X är binomialfördelad med väntevärde 10.
- (iv) X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 15.

(b) Låt X och Y vara stokastiska variabler med väntevärde μ_X och μ_Y, respektive. Vilket av följande påståenden är sant?

- (i) Det gäller alltid att $\mathbb{E}[X+Y] = \mu_X + \mu_Y$.
- (ii) $\mathbb{E}[X+Y] = \mu_X + \mu_Y$ gäller bara om $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$.
- (iii) $\mathbb{E}[X+Y] = \mu_X + \mu_Y$ gäller bara om X och Y är oberoende.

Uppgift 2. En vanlig kortlek innehåller 52 kort fördelade på fyra färger. Drag fyra kort på måfå (utan återläggning). Beräkna sannolikheten att de fyra korten är av olika färg.

Uppgift 3. En viss sjukdom antas finnas hos 0.1% av individerna i en population. Ett diagnostiskt test, vilket resulterar i ett positivt eller negativt svar, har utvecklats för att detektera sjukdomen. Testets *sensitivitet* (sannolikhet att en sjuk individ får ett positivt svar) är 99.5% och dess *specificitet* (sannolikheten att en frisk person får ett negativt svar) är 97%. Bestäm sannolikheten för att en på måfå vald person som testas positivt faktiskt är sjuk.

Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Beskriv variablerna *slumptal* och m, samt ange vilken plot som genererats av koden.

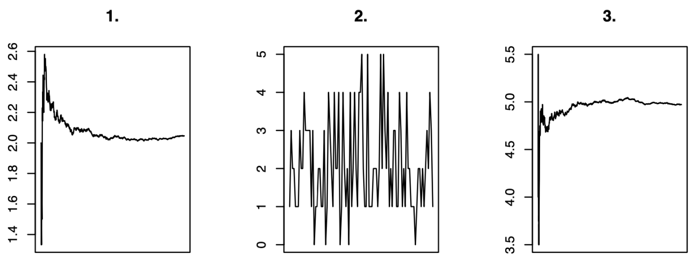
```r
set.seed(1337)

N <- 1200
n <- 10
p <- 1/5


slumptal <- rbinom(N, n, p)

m <- cumsum(slumptal)/1:length(slumptal)

plot(m, type = "l")
```



Betygsdel

Uppgift 5. En person som smittas med Ebola-viruset avlider till följd av sjukdomen med sannolikhet 0.9, och vi antar att olika personer avlider oberoende av varandra. På ett sjukhus i sydvästra Guinea (där en Ebola-epidemi startade i februari 2014) har organisationen Läkare Utan Gränser satt upp en smittskyddsavdelning där man tar emot Ebola-smittade patienter.

(a) Första veckan tar avdelningen emot 7 patienter. Bestäm sannolikheten att (exakt) tre av dem avlider till följd av sjukdomen.

(b) Det sker en dramatisk ökning av antalet patienter de näst-kommande veckorna. Den andra veckan tar de emot 12 patienter, den tredje veckan 254 patienter och den fjärde veckan tar man emot 762 patienter. Man har resurser för att klara av 850 dödsfall bland de patienter som anländer de första fyra veckorna. Uppskatta sannolikheten att Läkare Utan Gränser klarar driften på befintliga resurser.

Uppgift 6. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion på formen $f_X(x) = c(2x - x^2)$ för $0 \leq x \leq 2$, och som är noll i övrigt.

(a) Bestäm c så att ovanstående är en täthetsfunktion.

(b) Bestäm $\mathbb{E}[X]$ och $\text{Var}(X)$.

(c) Låt Y beteckna minimum av fyra oberoende slumpvariabler med samma fördelning som X. Bestäm väntevärdet av Y.

Uppgift 7. Låt slumpvektorn (U, V) vara likformigt fördelad på en kvadrat med sidlängd 1.

(a) Bestäm marginalfördelningarna för U och V, och visa att de är oberoende.

(b) Låt a beteckna ett av kvadratens hörn, och låt b beteckna det motstående hörnet. Låt X ange omkretsen på den rektangel med hörn i a och (U, V), och låt Y ange omkretsen för rektangeln med hörn i b och (U, V). Bestäm korrelationskoefficienten $\rho(X, Y)$ av X and Y.

Uppgift 8. I en urna ligger tre röda och nio gröna kulor. Drag slumpmässigt och utan återläggning en kula i taget tills dess att samtliga tolv kulor har blivit dragna. Bestäm sannolikheten av följande händelser:

(a) Den sist dragna kulan är röd.

(b) De två först dragna kulorna har olika färg.

(c) De tre röda kulorna blir dragna i en följd (utan gröna kulor däremellan).