Lösningar tenta Sannolikhetsteori I 2023-12-01

$\boxed{1}$ (a) $N=50,\ n=25,\ m=20$

$X \sim \mathrm{Hyp}(N,n,m)$

$$\mathbb{E}[X] = np = n\frac{m}{N} = 25\,\frac{20}{50} = 10$$

Svar (ii)

1 rätt ger 3p
2 rätt ger 5p

(b) För stokastiska variabler gäller alltid

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

(om väntevärden väldefinierade).

Svar (i)

$\boxed{2}$ Varje val av fyra kort lika sannolik.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\text{ gynnsamma}}{\#\text{ totalt}}$$

2p

Då urvalet behöver innehålla precis ett kort ur varje färg så får vi att antalet möjliga urval (utan ordning) blir

$$\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 13^4.$$

antal val av hjärter, etc.

Totala antalet urval $\binom{52}{4} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$.

3p

Vi får

$$\mathbb{P}(\text{olika färg}) = \frac{13^4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} \approx 0.1055$$

$\boxed{3}$ Drag en person på måfå. Låt

$S = \{\text{sjuk}\}$

$+ = \{\text{test pos.}\}$

$- = \{\text{test neg.}\}$

$\mathbb{P}(S) = 0.001$

$\mathbb{P}(+\mid S) = 0.995$

$\mathbb{P}(-\mid S^c) = 0.97$

givet i uppgift

Lagen om total sannolikhet ger

2p

$$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+\mid S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(+\mid S^c)\mathbb{P}(S^c) = 0.995\cdot 0.001 + 0.03\cdot 0.999$$
$$\approx 0.0310$$

Bayes sats ger

$$\mathbb{P}(S|+) = \frac{\mathbb{P}(S\cap +)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{\mathbb{P}(+|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(+)} \approx \frac{0.995\cdot 0.001}{0.0310} \approx 0.0321$$ 3p

Svar: 3,2% chans.

$\boxed{4}$ Variabeln slumptal ger en vektor en vektor av längd 1200 vars komponenter är oberoende $\mathrm{Bin}(10, 1/5)$-fördelade.

Variabeln m är på nytt en vektor av längd 1200, där element k är medelvärdet av de k första elementen i vektorn slumptal. 2p

Stora talens lag säger att medelvärdet av ett stort antal oberoende och likafördelade slumpvariabler med stor sannolikhet ligger nära väntevärdet. Då antalet ökar så konvergerar medelvärdet till väntevärdet.

Då väntevärdet av elementen i slumptal är $np = 10\cdot\frac{1}{5} = 2$ följer det att då vektorn m plottas så skall vi se en kurva som konvergerar mot 2. Det ser vi i figur 1. 3p

$\boxed{5}$ (a) Låt X ange antalet patienter första veckan som avlider. Då är $X \sim \mathrm{Bin}(7, 0.9)$. Därmed

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{7}{3} 0.9^3 0.1^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} 0.9^3\cdot 0.1^4 \approx 0.0026$$ 3p

(b) Låt Y ange antalet som avlider under de första fyra veckorna. Då är $Y \sim \mathrm{Bin}(1035, 0.9)$. Vi söker $\mathbb{P}(Y \le 850)$.

Då n är stort $(np(1-p) \approx 93 > 10)$ så kan normalapproximation användas. Dvs. vi får från centrala gränsvärdessatsen att

$$\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

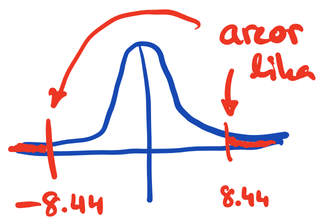
3p

gäller approximativt. (Binomialfördelningen uppstår som summa av oberoende Bern(p)-variabler.) Vi har därmed att

$$P(Y \le 850) = P\left(\frac{Y-0.9\cdot 1035}{\sqrt{1035\cdot 0.9\cdot 0.1}} \le \underbrace{\frac{850-0.9\cdot 1035}{\sqrt{1035\cdot 0.9\cdot 0.1}}}_{\approx -8.44}\right) \approx \Phi(-8.44)$$

$$= 1-\Phi(8.44)$$

$$\le 1-0.9999 \approx 0.$$



Svar: Otroligt osannolikt att de klarar driften.

4p

$\boxed{6}$ (a) För en täthet krävs $f(x) \ge 0$ samt att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 c\,(2x-x^2)\,dx = c\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= c\left(4-\frac{8}{3}\right) = c\,\frac{4}{3}.$$

Eftersom $2x-x^2 \ge 0$ för $x \in [0,2]$ ger uttrycket en giltig täthet om $c=\frac{3}{4}$.

2p

(b) Då X kontinuerlig gäller

$$E[X] = \int_0^2 x\,\frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)$$

$$= \frac{3\cdot 16}{4\cdot 12} = 1$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2\,\frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[2\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{32}{4}-\frac{32}{5}\right) = \frac{3\cdot 32}{4\cdot 20} = \frac{6}{5}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-E[X]^2 = \frac{6}{5}-1^2 = \frac{1}{5}.$$

3p

(c) Låt X_1, X_2, X_3, X_4 vara oberoende fördelade som X.

$$Y = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

Vi har

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 1 - \mathbb{P}(Y > y)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X > y)^4 = 1 - (1 - F_X(y))^4.$$ 2p

Vi har för $0 \leq y \leq 2$ att

$$F_X(y) = \int_0^y \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^y = \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right).$$

Detta ger för $0 \leq y \leq 2$ att

$$F_Y(y) = 1 - \left(1 - \frac{3y^2}{4} + \frac{y^3}{4}\right)^4.$$

Eftersom $f_Y(y) = F_Y'(y)$ får vi med partialintegration

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^2 y f_Y(y)\,dy = \left[y F_Y(y)\right]_0^2 - \int_0^2 F_Y(y)\,dy$$
$$= \underbrace{2F_Y(2)}_{=2} - \int_0^2 F_Y(y)\,dy.$$

Det är nu möjligt att använda att

$$(1 + (b+c))^4 = 1 + 4(b+c) + 6(b+c)^2 + 4(b+c)^3 + (b+c)^4$$
$$= 1 + 4(b+c) + 6(b^2 + 2bc + c^2)$$
$$+ 4(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) + (b^4 + 3b^3c + 6b^2c^2 + 3bc^3 + c^4).$$

En långdragen och ovärdig kalkyl senare finner vi att

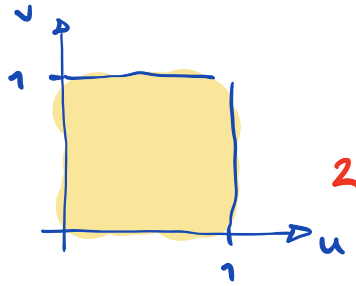
$$F_Y(y) = 3y^2 - y^3 - \frac{27}{8}y^4 + \frac{9}{4}y^5 + \frac{21}{16}y^6 - \frac{27}{16}y^7 + \frac{63}{256}y^8 + \frac{23}{64}y^9 - \frac{27}{128}y^{10} + \frac{3}{64}y^{11} + \frac{1}{256}y^{12}$$

Integrering ger att

$$\mathbb{E}[Y] = 2 - \frac{1048}{715} \approx 0.53.$$ 3p

$\boxed{7}$ (a) Låt oss anta att kvadraten är $[0,1]^2$ och att (U,V) är likformigt fördelad därpå. Detta ger

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{om } (u,v) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Vi får för $0 \le u \le 1$ att

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv$$
$$= \int_0^1 1 \cdot dv = 1,$$

2p

samt i övrigt gäller $f_U(u) = 0$. Därmed är $U \sim \text{likf}[0,1]$. Av symmetriskäl gäller detsamma för V. Därmed får vi

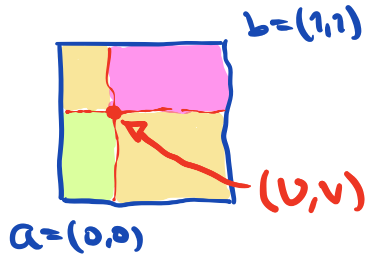
$$f_{U,V}(u,v) = 1 = f_U(u) \cdot f_V(v)$$

2p

om $u,v \in [0,1]$ och i övrigt är de 0. U och V är därför oberoende.

(b) Rektangeln med hörn i a och (U,V) är i figuren grön, och har omkrets

$$X = 2U + 2V.$$



Rektangeln med hörn i b och (U,V) är i figuren rosa, och har omkrets

$$Y = 2(1-U) + 2(1-V) = 4 - 2U - 2V = 4 - X.$$

2p

Det följer att

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, 4-X) = -\mathrm{Cov}(X,X) = -\mathrm{Var}(X).$$

Alt. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X(4-X)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[4-X]$ 2p

$$= 4\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X^2] - 4\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = -\mathrm{Var}(X).$$

Detta ger

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)} = -1.$$

2p

$\boxed{8}$ (a) Urnan innehåller tre röda och nio gröna. Varje kula är lika sannolik att bli dragen sist.

$$P(\text{röd sist}) = \frac{\#\text{gynnsamma}}{\#\text{totalt}} = \frac{\#\text{röda}}{\#\text{kulor}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

3p

(b) Vi har

$$P(\text{två första olika}) = P(\text{först röd, sedan grön}) + P(\text{först grön, sedan röd})$$
$$= \frac{3}{12}\cdot\frac{9}{11} + \frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11} = \frac{9}{22}.$$

3p

(c) Händelsen att de tre röda dras efter varandra inkluderar alla utfallen där röd hamnar på plats $k, k+1$ och $k+2$ för $k = 1, 2, \dots, 10$. Dessa är 10 till antalet. Totalt antal möjliga val för platserna/omgångarna som röd dras är

$$\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220.$$

3p

Detta ger

$$P(\text{röda på rad}) = \frac{\#\text{gynnsamma}}{\#\text{totalt}} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}.$$