

MT3001 – Sannolikhetsteori I – tentamen

Datum Torsdag 25 april, 2024

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.

Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. I följande flervalsfrågor finns ett rätt svar per fråga. Ange vilket. Motivering krävs ej i denna uppgift.

- (a) Låt X vara normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9, och låt Φ beteckna fördelningsfunktionen för en standard normalfördelning. Avgör vilket av följande som gäller:

- (i) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5)$,
- (ii) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 2\Phi(0.5) - 1$,
- (iii) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 2 - 2\Phi(0.5)$,
- (iv) $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = \Phi(0.5)$.

- (b) Vilken av följande funktioner är en täthetsfunktion?

- (i) $f(x) = x$ om $x \in [0, \sqrt{2}]$, och $f(x) = 0$ annars;
- (ii) $f(x) = x$ om $x \geq 0$, och $f(x) = 0$ annars;
- (iii) $f(x) = x$ om $x \in [0, 1]$, och $f(x) = 0$ annars;
- (iv) $f(x) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Uppgift 2. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion på formen $f_X(x) = c \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi$, och som är noll i övrigt.

- (a) Bestäm värdet på c och fördelningsfunktionen $F_X(x)$.
- (b) Bestäm väntevärdet $\mathbb{E}[X]$.

Uppgift 3. Ett medicinskt test mäter förekomsten av ett specifikt antigen i blodet, och används för att påvisa en viss form av cancer. Testet ger positivt resultat (förekomst av antigen) med sannolikhet 0.93 för patienter med cancertypen, och negativt med sannolikhet 0.97 för patienter utan cancertypen. Antag att 2% av individerna i en viss population bär på cancertypen.

- Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald individ ur populationen, enligt den likformiga fördelningen, får ett positivt testresultat?
- Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald individ, enligt den likformiga fördelningen, bär på cancertypen, given att hen fått ett positivt testresultat?

Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Ange vilket histogram som motsvarar Plot 2, samt den sats som förklarar varför histogrammet ser ut som det gör.

```
set.seed(420)

n <- 1200

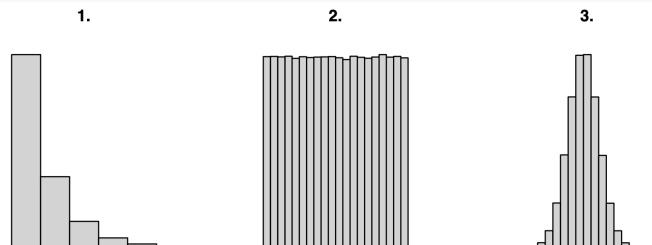
slumptal <- matrix(runif(n^2, min = 7, max = 18), nrow = n, ncol = n)

E <- (7+18)/2
D <- (18-7)/sqrt(12)

hist(slumptal) # Plot 1

stand <- (colSums(slumptal) - n*E)/(D * sqrt(n))

hist(stand) # Plot 2
```



Betygsdel

Uppgift 5. En vanlig kortlek innehåller 52 kort fördelade på de fyra färgerna hjärter, spader, ruter, klöver. I spelet Poker så delas fem kort (kallad en *hand*) ut till vardera spelare.

- Vad är sannolikheten att få en hand utan hjärter?
- Vad är sannolikheten att få en hand med bara hjärter?
- Vad är sannolikheten att få en hand med samtliga kort i samma färg?

Uppgift 6. Låt A , B och C vara oberoende händelser sådana att $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ och $\mathbb{P}(C) = 0.1$.

- (a) Beräkna sannolikheten att minst en av händelserna inträffar.
- (b) Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna inträffar.
- (c) Beräkna den betingade sannolikheten för A givet att $A \cup B$ inträffar.

Uppgift 7. Livslängden av en viss elektronisk komponent har en fördelning som enbart är delvis känd: Det är känt att komponentens livslängd överstiger 60 minuter med sannolikhet 0.01. Komponenterna ingår i en viss elektrisk krets, där olika komponenter av samma typ kan antas ha livslängder som är oberoende och likafördelade. Hur många komponenter behöver ingå i kretsen för att minst en komponent fortfarande skall fungera efter 60 minuter med sannolikhet minst 0.9?

Uppgift 8. Den tid (i minuter) som behövs för att betjäna en kund som anländer till ett lager kan betraktas som en summa av tiden av tre olika moment, som är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 2, 3, respektive 6. Betjäningstiderna för olika kunder kan antas vara oberoende.

- (a) Beräkna väntevärde och varians för tiden det tar att betjäna en kund.
- (b) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda betjäningstiden för 100 kunder överstiger 1000 minuter.
- (c) Bestäm ett tal n så att den sammanlagda betjäningstiden för n kunder med sannolikhet 0.9 ej överstiger 1000 minuter.