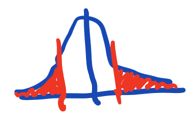
Tenta Sannolikhetsteori I 2024-10-26

1 (a) Vi har $X \sim N(2,9)$, så $\frac{X-2}{3} \sim N(0,1)$.

$$\mathbb{P}(X \leq 0.5) = \Phi\left(\frac{0.5-2}{3}\right) = \Phi(-0.5)$$
$$= 1 - \Phi(0.5).$$

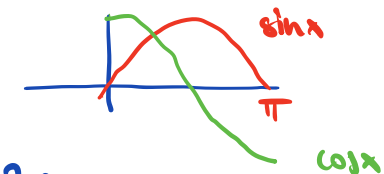


Svar: $\boxed{(i)}$

(b) A och B oberoende om $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
A och B disjunkta ger $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
Om $\mathbb{P}(A) > 0$ och $\mathbb{P}(B) > 0$ så kan A och B ej vara disjunkta och oberoende samtidigt. 5p

Svar: $\boxed{(iii)}$

2 (a) För att vara en täthet krävs $f_X \geq 0$ och
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$



Vi har
$$\int_0^{\pi} c \cdot \sin x\,dx = c\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = c(1+1) = 2c$$

Vi får $\boxed{c = 1/2}$ för att ge täthet. Detta ger 3p

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \int_0^x \tfrac{1}{2}\sin y\,dy$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cos y\right]_0^x = \boxed{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos x}$$

för $0 \leq x \leq \pi$.

(b) Då X kontinuerlig, med partialintegration,

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\pi} x\,\tfrac{1}{2}\sin x\,dx = \left[-x\tfrac{1}{2}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\tfrac{1}{2}\cos x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\cos x\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$ 2p

<u>Alt.</u> Notera att $\mathbb{E}[X] = \frac{\pi}{2}$ pga symmetri.

3 Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{75}$ ange vikten på de äpplen som packas i en viss påse. Enl. uppgift gäller

$$X_k \sim N(140, 30^2).$$

Då summan av oberoende normalfördelade på nytt är normalfördelade gäller för $Y = X_1 + \ldots + X_{75}$ att

$$Y \sim N(140 \cdot 75, 30^2 \cdot 75).$$ 2p

Därav

$$\mathbb{P}(Y \le 10\,000) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{Y - 140\cdot 75}{30\cdot\sqrt{75}}}_{\sim N(0,1)} \le \underbrace{\frac{10000 - 140\cdot 75}{30\cdot\sqrt{75}}}_{\approx -1.92} \Big) \approx \Phi(-1.92)$$

Tabell ger $\Phi(-1.92) = 1 - \Phi(1.92) \approx 1 - 0.9726 = 0.0274$ 3p

Svar: $\boxed{0.0274.}$

4 Koden genererar en matris slumptal vilken innehåller oberoende observationer från en likformig fördelning. Kolonnerna i matrisen summeras och standardiseras och sparas som en vektor stand. Det är denna vektor som vi ser i plot 2. Summering och standardisering ger av **Centrala gränsvärdessatsen** att observationerna i stand följer en approximativ $N(0,1)$-fördelning. Plot 2 motsvaras därför av **histogram C.** 5p

5 Vi kan anta att kortleken är välblandad, och att samtliga händer (kombinationer av fem kort) är lika sannolika. Detta leder till den klassiska sannolikhetsfördelningen där

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\text{ gynnsamma}}{\#\text{ totalt}}$$ 4p

Det totala antalet händer är $\binom{52}{5}$.

(a) $A = \{\text{inga hjärter}\}$ ger $\#\text{gynnsamma} = \binom{39}{5}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} \approx \boxed{0.2215}$$ 2p

(b) $B = \{\text{bara hjärter}\}$ ger $\#\text{gynnsamma} = \binom{13}{5}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48} \approx \boxed{0.0004952}$$ 2p

(c) Eftersom lika sannolikt att få alla fem hjärter som spader, klöver eller ruter så får vi

$$\mathbb{P}(\text{samma färg}) = \mathbb{P}(\text{alla hjärter}) + \mathbb{P}(\text{alla ruter}) + \mathbb{P}(\text{alla spader}) + \mathbb{P}(\text{alla klöver})$$
$$= 4 \cdot \mathbb{P}(\text{alla hjärter}) \approx \boxed{0.001981}$$

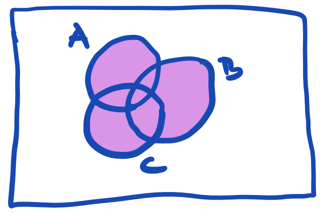
2p

6 Vi har oberoende händelser A, B, C med $\mathbb{P}(A) = 0.4$ $\mathbb{P}(B) = 0.3$ $\mathbb{P}(C) = 0.1$

Att händelserna är oberoende innebär att

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

2p



(a) Vill beräkna $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

Alt. 1 Inklusions-exklusionsformeln ger

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
$$= 0.4 + 0.3 + 0.1 - 0.4 \cdot 0.3 - 0.3 \cdot 0.1 - 0.4 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = \boxed{0.622}$$

Alt. 2 Beräkna i två steg:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}([A \cup B] \cap C).$$

3p

Sannolikheterna i HL kan utvecklas vidare

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

samt

$$\mathbb{P}([A \cup B] \cap C) = \mathbb{P}([A \cap C] \cup [B \cap C]) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Detta leder till samma formel som ovan och samma svar.

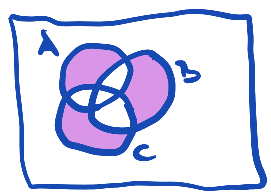
Alt. 3 De Morgans lag ger

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) \overset{\text{oberoende}}{=} 1 - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C^c)$$
$$= 0.622$$

(b) Vill beräkna

$$\mathbb{P}(\text{precis en}) \overset{\text{axiom}}{=} \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C).$$

disjunkta



Oberoendet ger

$$\mathbb{P}(\text{precis en}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) = \boxed{0.456}$$

3p

(c) Per definition

$$\mathbb{P}(A \mid A\cup B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap [A\cup B])}{\mathbb{P}(A\cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)} \approx \boxed{0.6897}$$ 2p

7 Vi vill konstruera en krets med n komponenter vars livslängder $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kan anses oberoende och likafördelade med

$$\mathbb{P}(X_k > 60) = 0.01$$

Låt $T = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Vill bestämma n så att

$$\mathbb{P}(T > 60) \geq 0.9.$$

5p

Vi har

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T>60) &= 1-\mathbb{P}(T\leq 60)\\ &= 1-\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k\leq 60)\\ &= 1-(1-\mathbb{P}(X_k>60))^n\\ &= 1-0.99^n\end{aligned}$$

oberoende

Vi vill alltså ha n så att $0.99^n \leq 1-0.9 = 0.1$.

Detta gäller för

5p

$$n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.99} \approx 229.1$$

Alltså krävs $\boxed{230}$ komponenter.

8 (a) Låt X_1, X_2, X_3 ange betjäningstiden för de tre olika momenten för en godtycklig kund. Kundens totala betjäningstid Y ges då av $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Då X_1, X_2, X_3 är oberoende och en $\exp(\lambda)$-fördelning har väntevärde $\frac{1}{\lambda}$ och varians $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$ följer det att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[X_1]+\mathbb{E}[X_2]+\mathbb{E}[X_3]\\ &= 2+3+6 = 11\end{aligned}$$

3p

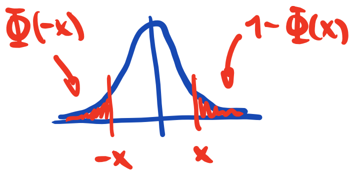
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\mathrm{Var}(X_3)\\ &= 2^2+3^2+6^2 = 4+9+36 = 49\end{aligned}$$

(b) Låt $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{100}$ beteckna de sammantagna betjäningstiderna för 100 kunder. Enligt uppgift kan dessa antas vara oberoende. Centrala gränsvärdessatsen gör gällande att

$$\frac{\sum_{k=1}^{100} Y_k - 11\cdot 100}{7\cdot\sqrt{100}}$$

approximativt följer en $N(0,1)$-fördelning. Därmed får vi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{100} Y_k > 1000\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{100} Y_k \leq 1000\right)\\
&\approx 1-\Phi\left(\frac{1000-1100}{70}\right)\\
&= 1-\Phi\left(-\frac{10}{7}\right)\\
&= 1-\left(1-\Phi\left(\frac{10}{7}\right)\right)\\
&= \Phi(10/7)\\
&\approx \Phi(1.43) \approx \boxed{0.9236}
\end{aligned}$$



ur tabell

4p

(c) Slutligen vill vi bestämma n så att

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k > 1000\right) \approx 0.1.$$

Med ovanstående resonemang gäller

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k > 1000\right) \approx 1-\Phi\left(\frac{1000-11\cdot n}{7\cdot\sqrt{n}}\right)$$

Låt λ_α beteckna det värde där $\Phi(\lambda_\alpha) = 1-\alpha$. Vi söker därmed $\lambda_{0.1}$. Tabell ger $\lambda_{0.1} \approx 1.2816$. Därmed söker vi n så att

$$\frac{1000-11\cdot n}{7\sqrt{n}} \approx 1.2816$$

Då vi vill att summan ej ska överstiga 1000 söker vi det största n så VL ej understiger 1.2816.

$n = 84$ ger VL ≈ 1.18

$n = 83$ ger VL ≈ 1.36

3p

Svaret är därmed $\boxed{n=83}$.