

MT3001 – Sannolikhetsteori I – tentamen

Datum Torsdag 12 december, 2024

Examinator Daniel Ahlberg

Hjälpmedel Formelblad, normalfördelningstabell och miniräknare. Samtliga hjälpmedel delas ut vid tentan.

Bedömning Tentamen är indelad i en basdel och en betygsdel, vilka består av 20 respektive 40 poäng. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även betygsdelen, som bestämmer betyget. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen:

	A	B	C	D	E
Basdel	14	14	14	14	14
Betygsdel	32	24	16	8	0

Uppgifter på basdelen kan ge upp till fem poäng var, och uppgifter på betygsdelen kan ge upp till tio poäng var. Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Basdel

Uppgift 1. I följande flervalsfrågor finns ett rätt svar per fråga. Ange vilket. Motivering krävs ej i denna uppgift.

- (a) Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel som är likformigt fördelad på $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 5\}$. Vilket av följande är korrekt:

- (i) $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{5}$ och $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5) = \frac{1}{5}$,
- (ii) $\mathbb{P}(X = 5) = 0$ och $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5) = \frac{1}{5}$,
- (iii) $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{5}$ och $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5) = \frac{4}{5}$,
- (iv) $\mathbb{P}(X = 5) = 0$ och $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5) = \frac{4}{5}$.

- (b) Sannolikheten att vinna på en trisslott är $\frac{1}{5}$. Köp 100 lotter, och låt X ange antalet vinstlotter av de 100. Vilket av följande gäller:

- (i) $\mathbb{P}(X \geq 30) \approx 0.16$,
- (ii) $\mathbb{P}(X \geq 30) \approx 0.67$,
- (iii) $\mathbb{P}(X \geq 30) \approx 0.01$,
- (iv) $\mathbb{P}(X \geq 30) \approx 0.10$.

Uppgift 2. Låt (X, Y) vara en kontinuerlig slumpvektor vars täthetsfunktion ges av

$$f_{X,Y}(x, y) = xy + x, \quad \text{för } 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1.$$

Bestäm marginaltätheten och väntevärdet för Y .

Uppgift 3. En urna innehåller 3 röda, 3 blåa och 4 gröna bollar. Drag tre bollar på måfå (utan återläggning). Bestäm sannolikheten att samtliga bollar har olika färg.

Uppgift 4. Studera nedanstående R-kod. Två utav variablerna A , B , C och D återges i Fig. 1 och Fig. 2. Avgör vilken variabel som genererat respektive histogram, samt motivera ditt svar.

```
set.seed(3)
A <- runif(n = 10, min = 0, max = 8)
B <- rnorm(n = 1000, mean = 4, sd = 2)
C <- rexp(n = 100, rate = 1)
D <- rbinom(n = 10000, size = 8, prob = 0.85)
```

Fig. 1

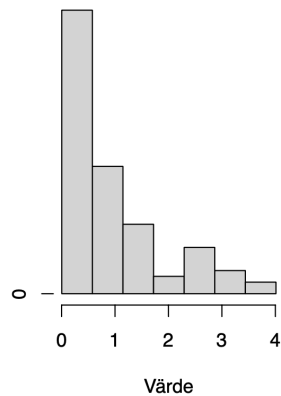
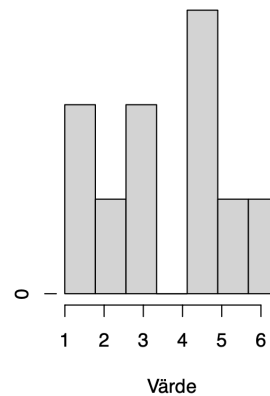


Fig. 2



Betygsdel

Uppgift 5. Livslängden av en viss elektronisk komponent har en fördelning som enbart är delvis känd: Det är känt att komponentens livslängd överstiger 60 minuter med sannolikhet 0.99. Komponenterna ingår i en viss elektrisk krets, där olika komponenter av samma typ kan antas ha livslängder som är oberoende och likafördelade. Hur många komponenter kan som mest ingå i kretsen innan sannolikheten för händelsen "samtliga komponenter fungerar efter 60 minuter" blir lägre än 0.9?

Uppgift 6. Ett bostadsområde i utkanten av en stad finns 3000 hushåll. Ett bageri i området uppskattar att sannolikheterna för att ett givet hushåll köper noll, ett, två eller tre matbröd en given söndag till att vara 0.40, 0.35, 0.15 respektive 0.10, samt att antalet köpta matbröd i olika hushåll kan antas vara oberoende av varandra.

- Bestäm väntevärde och varians för antalet matbröd i ett hushåll.
- Uppskatta hur många matbröd som bageriet behöver baka för att sannolikheten att matbröden räcker ej ska understiga 90%.

Uppgift 7. Låt A , B och C vara oberoende händelser sådana att $\mathbb{P}(A) = 0.1$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$ och $\mathbb{P}(C) = 0.3$.

- (a) Beräkna sannolikheten att minst en av händelserna inträffar.
- (b) Beräkna sannolikheten att exakt två av händelserna inträffar.
- (c) Beräkna den betingade sannolikheten för A givet att $A \cup B \cup C$ inträffar.

Uppgift 8. Låt (X, Y) vara en tvådimensionell slumpvariabel som är likformigt fördelad på triangeln $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

- (a) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y .
- (b) Bestäm väntevärdena för X och Y .
- (c) Bestäm kovariansen mellan X och Y .